

**Zadanie 1.** Odpowiedź: Tak, liczba 1 jest wymierna.

**Rozwiązanie**

$$\frac{a_{10} \cdot a_{70} + a_{80} \cdot a_{160}}{b_{20} \cdot b_{40} - b_{110} \cdot b_{130}} = \frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ + \sin 80^\circ \cdot \sin 160^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ - \cos 110^\circ \cdot \cos 130^\circ} =$$

$$\frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \sin 50^\circ - (-\sin 20^\circ) \cdot (-\cos 50^\circ)} = \frac{\sin(10^\circ + 20^\circ)}{\cos 20^\circ \cdot \sin 50^\circ - \sin 20^\circ \cdot \cos 50^\circ} =$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin(50^\circ - 20^\circ)} = 1$$

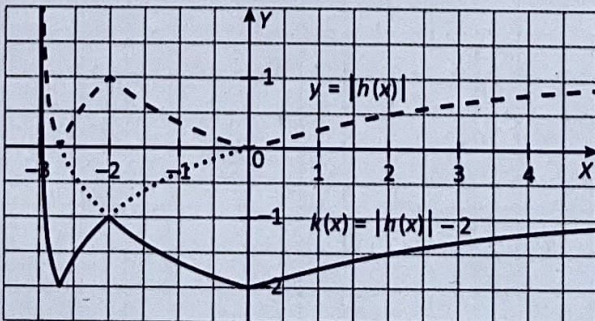
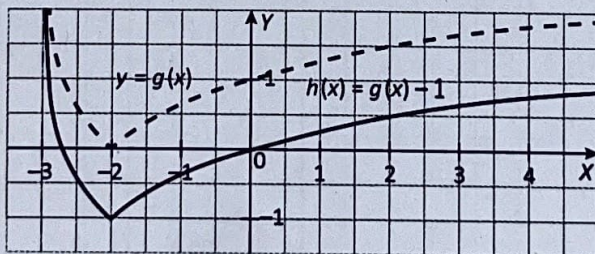
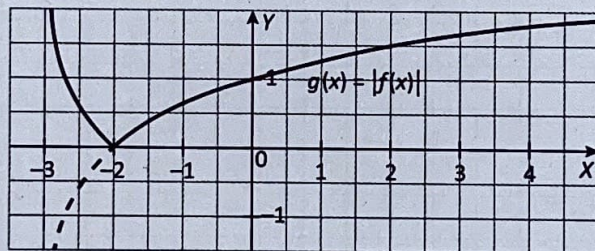
**Zadanie 2.1.**

**Rozwiązanie**

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(-2+b) = 0 \\ \log_a(b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^0 = b-2 \\ a^1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$$

**Zadanie 2.2.**

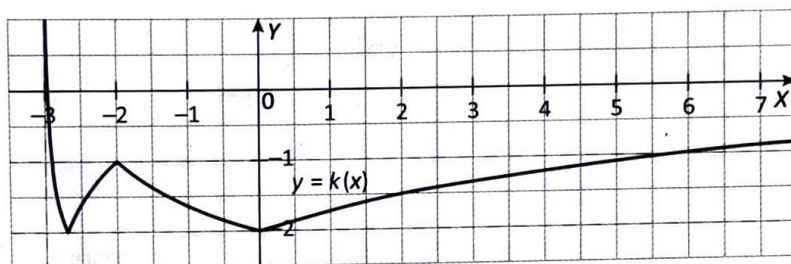
**Rozwiązanie**



**Zadanie 2.3.****Rozwiązanie**

$$\left| \log_3(x+3) - 1 \right| = m+2 \Leftrightarrow \underbrace{\left| \log_3(x+3) - 1 \right| - 2}_{k(x)} = m$$

Wykorzystamy wykres z zadania 2.2.

Odp.  $m \in (-2, -1)$ .**Zadanie 3.** Odpowiedź: Równanie nie ma rozwiązań.**Rozwiązanie**Założmy, że dla pewnej liczby rzeczywistej  $t$  zachodzi  $\sin 2t + \sin \frac{3t}{2} = 2$ .Ponieważ  $\sin 2t \leq 1$  i  $\sin \frac{3t}{2} \leq 1$ , więc

$$\begin{cases} \sin 2t = 1 \\ \sin \frac{3t}{2} = 1 \end{cases}$$

Stąd dla pewnych liczb całkowitych  $k, m$  mamy

$$\begin{cases} 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \\ 6t = \frac{3\pi}{2} + 6k\pi \\ 6t = 2\pi + 8m\pi \end{cases}$$

Zatem

$$\frac{3\pi}{2} + 6k\pi = 2\pi + 8m\pi$$

$$3 + 12k = 4 + 16m$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo  $3 + 12k$  jest liczbą nieparzystą, natomiast  $4 + 16m$  jest liczbą parzystą.Zatem równanie  $\sin 2x + \sin \frac{3x}{2} = 2$  nie ma rozwiązań.**Zadanie 4.** Odpowiedź:  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$ .**Rozwiązanie**

$$g(x) = f'(x) = 2ax + b$$

$$h(x) = g'(x) = 2a$$

Wykorzystując współrzędne punktu A otrzymujemy

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ -2a + b = 2 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

**Zadanie 5.** Odpowiedź:  $P(A) < P(B)$ .

*Rozwiązanie*

Rozważamy schemat Bernoullego złożony z 10 prób – rzutów monetą. Sukcesem jest wypadnięcie orła, a prawdopodobieństwo sukcesu jest równe  $p = \frac{1}{2}$ .

Liczba sukcesów  $k \geq 9$ .

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S_{10} = 9) + P(S_{10} = 10) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \\ &= \frac{10+1}{2^{10}} = \frac{11}{1024} \end{aligned}$$

Rozważamy schemat Bernoullego złożony z 6 prób – rzutów kostką. Sukcesem jest wypadnięcie jednego oczka lub dwóch oczek, a prawdopodobieństwo sukcesu jest równe  $p = \frac{1}{3}$ .

Liczba sukcesów  $k \geq 5$ .

$$\begin{aligned} P(B) &= P(S_6 = 5) + P(S_6 = 6) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \\ &= \frac{12+1}{3^6} = \frac{13}{729} \end{aligned}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{11}{1024}}{\frac{13}{729}} = \frac{11 \cdot 729}{13 \cdot 1024} < 1$$

Odp.  $P(A) < P(B)$ .

**Zadanie 6.** Odpowiedź: Na czworokącie  $DEFG$  można opisać okrąg.

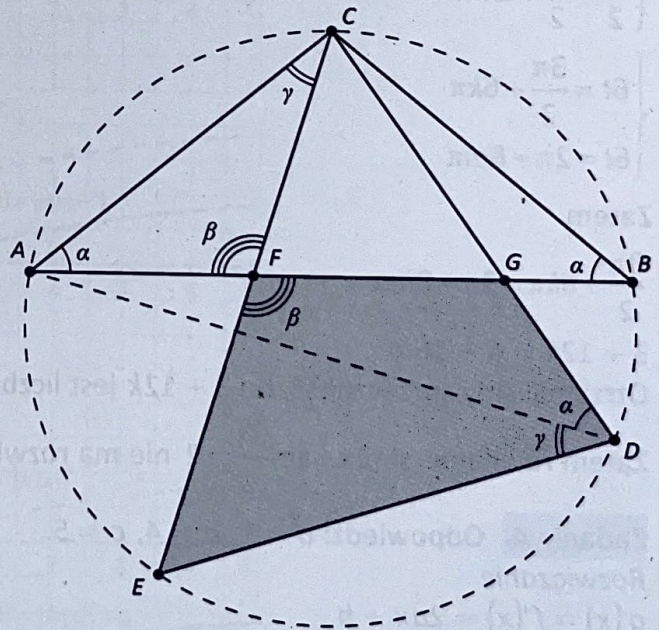
*Rozwiązanie*

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Wykorzystując twierdzenie o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku oraz własność o sumie kątów w trójkącie otrzymujemy

$$|\angle EFG| + |\angle EDG| = \beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

Stąd wynika teza, że na czworokącie  $DEFG$  można opisać okrąg.



**Zadanie 7.****Rozwiązanie**

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ABC$

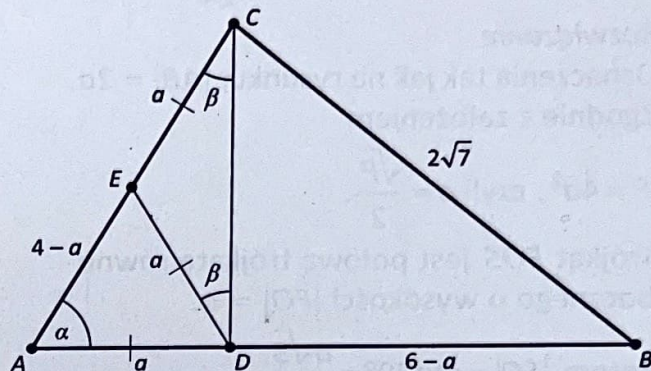
$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 4^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{36 + 16 - 28}{48} = \frac{1}{2}$$

Zatem  $\alpha = 60^\circ$ , czyli trójkąt  $ADE$  jest równoboczny, więc  $|AE| = a = 2$ .

Pole trójkąta  $ADE$

$$P_{ADE} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

Trójkąt  $CED$  jest równoramienny, więc  $2\beta = 60^\circ$ , czyli  $|\angle ADC| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ , więc  $CD$  jest wysokością w trójkącie  $ABC$ .

**Zadanie 8.** Odpowiedź:  $P = 16$ **Rozwiązanie**

Rozwiązanie układów równań

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Zatem wierzchołkami trapezu są punkty  $A = (0, 0)$ ,  $B = (3, -3)$ ,  $C = (4, 0)$ ,  $D = (-1, 5)$ .

Długości podstaw trapezu

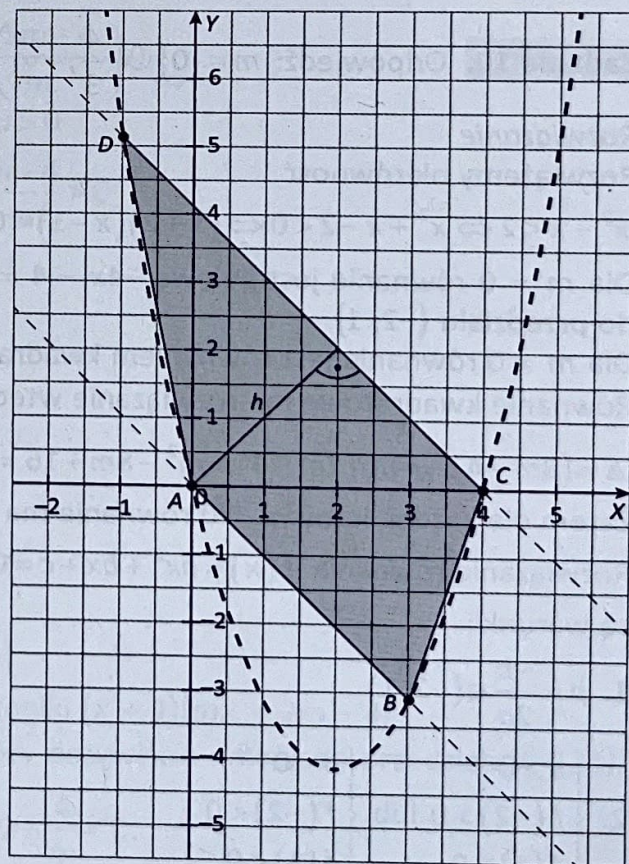
$$|AB| = 3\sqrt{2}, |CD| = 5\sqrt{2}$$

Wysokość trapezu jest równa odległości punktu  $A = (0, 0)$  od prostej o równaniu  $x + y - 4 = 0$ .

$$h = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Pole trapezu

$$P = \frac{3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 16$$



**Zadanie 9.** Odpowiedź:  $k = \frac{\sqrt{42}}{24}$ .

**Rozwiązanie**

Oznaczenia tak jak na rysunku,  $|AB| = 2a$ .

Zgodnie z założeniem

$$P = 4a^2, \text{ czyli } a = \frac{\sqrt{P}}{2}.$$

Trójkąt  $FOS$  jest połową trójkąta równobocznego o wysokości  $|FO| = a$ .

$$\text{Zatem } |SO| = a \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trójkąt prostokątny  $CSO$

$$|CS| = \sqrt{|SO|^2 + |CO|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + 2a^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}a$$

Wykorzystując, że punkt  $E$  jest środkiem przeciwprostokątnej  $CS$  trójkąta  $CSO$  otrzymujemy

$$h = |CE| = \frac{1}{2}|CS| = \frac{\sqrt{21}}{6}a$$

Pole trójkąta  $DBE$

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{6}a = \frac{\sqrt{42}}{6}a^2 = \frac{\sqrt{42}}{24}P$$

**Zadanie 10.** Odpowiedź:  $m \in \{0\} \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ .

**Rozwiązanie**

Rozwiążemy nierówność

$$x^2 + x < 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$$

Dla  $m = 0$  równanie jest liniowe  $-4x - 4 = 0$ . Rozwiązaniem jest liczba  $-1$ , która oczywiście należy do przedziału  $(-2, 1)$ .

Dla  $m \neq 0$  równanie jest równaniem kwadratowym.

Równanie kwadratowe ma rozwiązanie wtedy, gdy  $\Delta \geq 0$ .

$$\Delta = (3m-4)^2 - 4m(2m-4) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$$

Zatem dla każdej liczby  $m \neq 0$  równanie ma rozwiązanie.

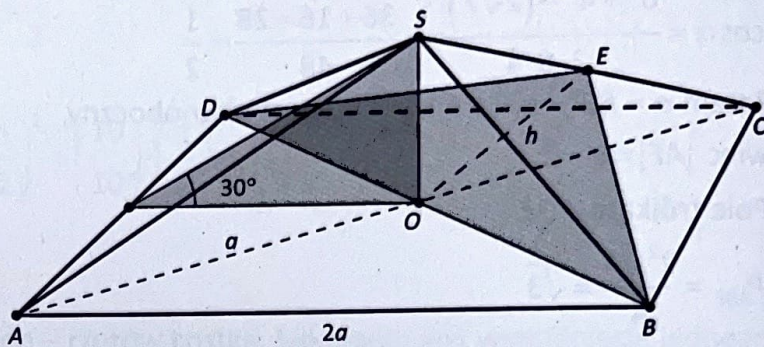
Rozwiązanie równania  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  należy do przedziału  $(-2, 1)$  wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$1. \ p = \frac{-b}{2a} \in (-2, 1)$$

$$2. \ \begin{cases} a > 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a < 0 \\ f(-2) < 0 \end{cases}$$

$$f(1) = m + 3m - 4 + 2m - 4 = 6m - 8$$

$$f(-2) = 4m - 6m + 8 + 2m - 4 = 4$$



Drugi warunek

$$\begin{cases} m > 0 \\ 4 > 0 \\ 6m - 8 > 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} m < 0 \\ 4 < 0 \\ 6m - 8 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$$

Zatem

$$\begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ \frac{-3m+4}{2m} > -2 \\ \frac{-3m+4}{2m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ -3m+4 > -4m \\ -3m+4 < 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ m > -4 \\ m > \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left( \frac{4}{3}, +\infty \right)$$

II sposób

Początek rozwiązania taki sam.

Rozwiązania kwadratowego  $x_1, x_2$  należą do przedziału  $(-2, 1)$  wtedy, gdy

$$\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \\ x_1 > -2 \\ x_2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \\ x_1 + 2 > 0 \\ x_2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) < 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 < 0 \\ x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c+b}{a} + 1 > 0 \\ \frac{-b}{a} - 2 < 0 \\ \frac{c-2b}{a} + 4 > 0 \\ \frac{-b}{a} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5m-8}{m} + 1 > 0 \\ \frac{-3m+4}{m} - 2 < 0 \\ \frac{-4m+4}{m} + 4 > 0 \\ \frac{-3m+4}{m} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6m-8}{m} > 0 \\ \frac{-5m+4}{m} < 0 \\ \frac{4}{m} > 0 \\ \frac{m+4}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6m-8}{m} > 0 \\ \frac{-5m+4}{m} < 0 \\ m > 0 \\ \frac{m+4}{m} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m-8 > 0 \\ -5m+4 < 0 \\ m > 0 \\ m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ m > \frac{4}{5} \\ m > 0 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left( \frac{4}{3}, +\infty \right)$$

III sposób

Rozwiążemy nierówność

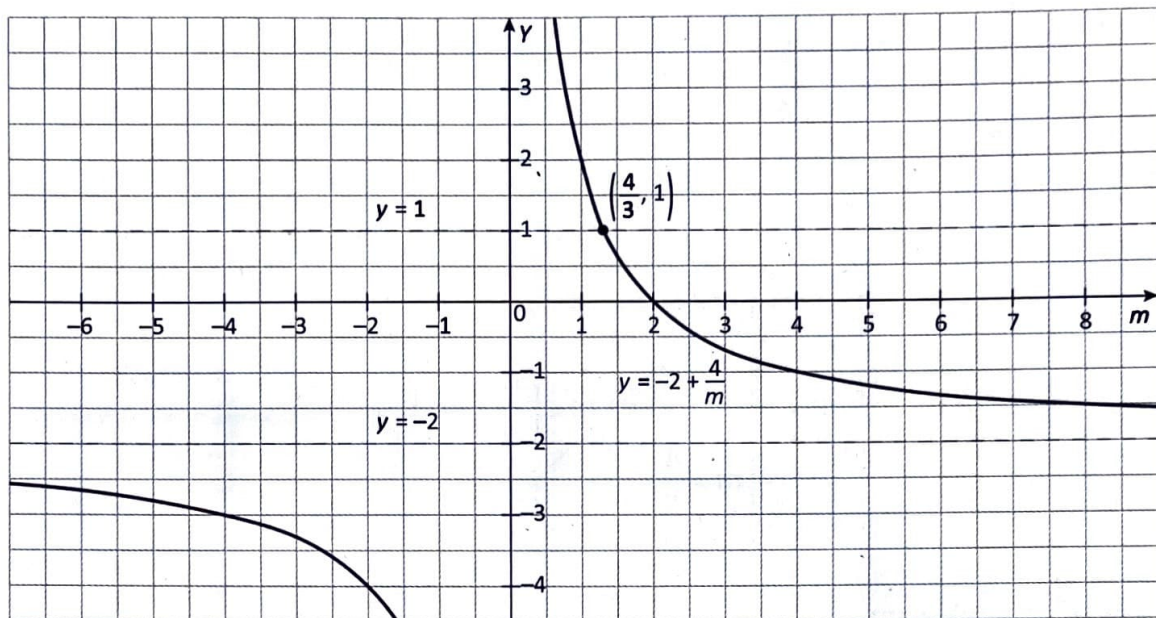
$$x^2 + x < 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$$

Wielomian  $mx^2 + (3m-4)x + 2m-4$  rozkłada się na czynniki  $(x+1)(mx+2m-4)$ .

Dla  $m = 0$  wielomian ma jeden pierwiastek  $x_1 = -1$ , który oczywiście należy do przedziału  $(-2, 1)$ .

Dla  $m \neq 0$  wielomian ma dwa pierwiastki  $x_1 = -1$ ,  $-2 < -2 + \frac{4}{m} < 1$ .

Układ nierówności  $-2 < -2 + \frac{4}{m} < 1$  rozwiążemy graficznie.



Odp.  $m \in \{0\} \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ .

**Zadanie 11.** Odpowiedź:  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

**Rozwiązanie**

Równanie prostej  $k$

$$y = a(x - 2) + 1, a \in (-\infty, 0)$$

Współrzędne punktów  $A, B$

$$A = \left(-\frac{1}{a} + 2, 0\right), B = (0, -2a + 1)$$

Pole trójkąta  $ABO$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{a} + 2\right) \cdot (-2a + 1) = 2 - 2a - \frac{1}{2a}$$

Wtedy

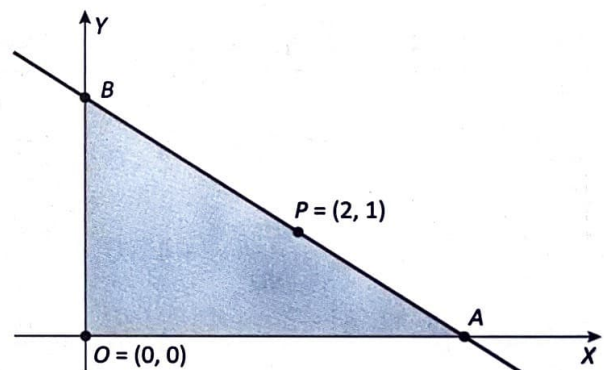
$$P'(a) = -2 + \frac{1}{2a^2} = \frac{1 - 4a^2}{2a^2}$$

Uwzględniając dziedzinę funkcji  $P$  otrzymujemy

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$P'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$P'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$



|         |                                                                                     |                    |                                                                                       |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$     | $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$                                                | $-\frac{1}{2}$     | $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$                                                        |
| $P'(a)$ | -                                                                                   | 0                  | +                                                                                     |
| $P(a)$  |  | Minimum<br>lokalne |  |

W przedziale  $(-\infty, 0)$  minimum jest wartością najmniejszą.

Zatem prosta  $k$  ma równanie  $y = -\frac{1}{2}x + 2$