

Zadanie 1. Odpowiedź: 43 wyrazy, od a^1 do a^{43} .

Rozwiązanie

$$a_n = \frac{2024}{n!} - \frac{\binom{n+2}{3} \cdot 3!}{(n+1)!} = \frac{2024}{n!} - \frac{\frac{(n+2)!}{3! \cdot (n-1)!} \cdot 3!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2024}{n!} - \frac{(n+2)(n+1)n}{(n+1) \cdot n!} =$$

$$\frac{2024}{n!} - \frac{(n+2)n}{n!} = -\frac{n^2 + 2n - 2024}{n!} = -\frac{(n-44)(n+46)}{n!}$$

$$a_n > 0 \Leftrightarrow n-44 < 0 \Leftrightarrow n < 44$$

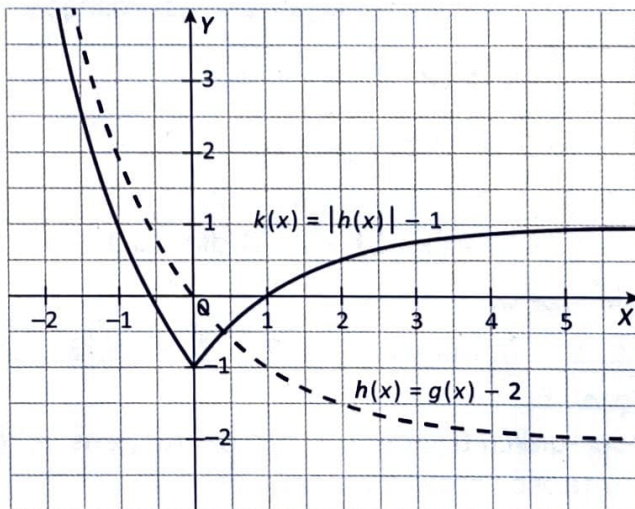
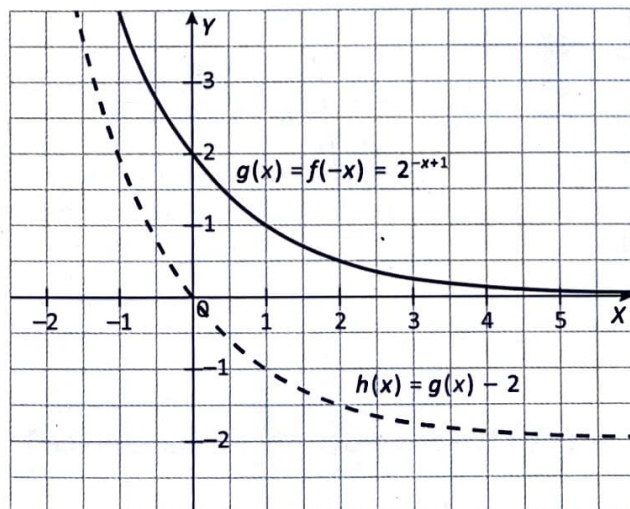
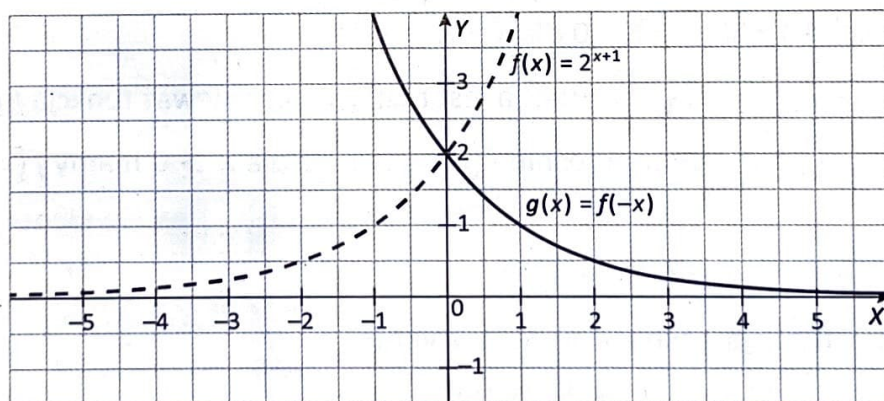
Zadanie 2.1.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1+b}=1 \\ a^{0+b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1} \cdot a^b=1 \\ a^b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1} \cdot 2=1 \\ a^b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Zadanie 2.2.

Rozwiązanie



Zadanie 2.3. Odpowiedź: $m \in (-1, 1)$.

Rozwiązanie

$$f(x) = 2^{x+1}$$

$$g(x) = f(-x) = 2^{-x+1}$$

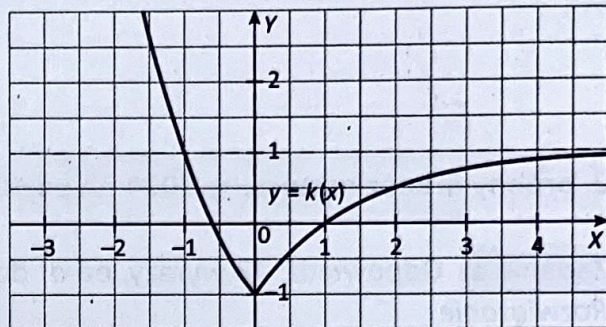
$$h(x) = g(x) = 2^{-x+1} - 2$$

$$k(x) = |2^{-x+1} - 2| - 1$$

$$|2^{-x+1} - 2| = m + 1 \Leftrightarrow$$

$$|2^{-x+1} - 2| - 1 = m \Leftrightarrow k(x) = m$$

Wykorzystamy wykres z zadania 2.2.



Zadanie 3.

Rozwiązanie

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = x(x^2 - 3x + 3) + 1 = x\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + 1$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$.

Zgodnie z założeniem $x > 0$, więc $x\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0$, czyli nierówność $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 > 0$ jest

prawdziwa.

II sposób

$$\text{Niech } f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$$

$$\text{Wtedy } f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0 \text{ dla } x \neq 1.$$

Zatem w przedziałach $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ funkcja jest rosnąca, a ponieważ funkcja f jest ciągła, więc jest rosnąca w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Jednocześnie $f(0) = 1$, więc dla $x > 0$ mamy $f(x) > 1 > 0$.

III sposób

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2.$$

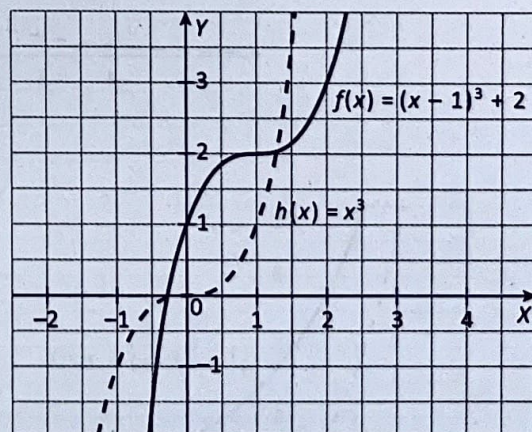
Funkcja $h(x) = x^3$ jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}$, a wykres funkcji f otrzymujemy przesuwając wykres funkcji h o wektor $[1, 2]$, więc funkcja f też jest rosnąca.

$$(x-1)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -2 \Leftrightarrow$$

$$x-1 = -\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{2}$$

Zatem

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2 > 0 \text{ dla } x > 1 - \sqrt[3]{2}, \text{ tym bardziej dla } x > 0.$$



Zadanie 4. Odpowiedź: $-\pi - 2, -2, \pi - 2, 2\pi - 2$

Rozwiązanie

Wartości funkcji trygonometrycznej tangens są równe wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się o całkowitą wielokrotność liczby π . Zatem

$$2x + 3 = x + 1 + k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

Stąd

$$x = k\pi - 2$$

Wyznamy rozwiązania należące do przedziału $[-2\pi, 2\pi]$

$$-2\pi \leq k\pi - 2 \leq 2\pi$$

$$-2 + \frac{2}{\pi} \leq k \leq 2 + \frac{2}{\pi}$$

Zatem $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Rozwiązania należące do przedziału $[-2\pi, 2\pi]$: $-\pi-2, -2, \pi-2, 2\pi-2$.

Zadanie 5. Odpowiedź: 360.

Rozwiązanie

Liczby bez zera

Cyfry 1 i 2 możemy postawić na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów.

Na pozostałych pozycjach stawiamy cyfry różne od 0, 1, 2.

Można to zrobić na $7 \cdot 7 = 49$ sposobów.

Zatem liczb bez 0 jest $6 \cdot 49 = 294$.

Liczby z jednym zerem

Zero możemy postawić na $\binom{3}{1} = 3$ sposoby.

Cyfry 1 i 2 możemy postawić na $\binom{3}{2} = 3$ sposoby.

Na ostatnie wolnej pozycji stawiamy cyfrę różną od 0, 1, 2.

Można to zrobić na 7 sposobów.

Zatem liczb z jednym zerem jest $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$.

Liczby z dwoma zerami

Zera możemy postawić na $\binom{3}{2} = 3$ sposoby.

Cyfry 1 i 2 możemy postawić na $\binom{2}{2} = 1$ sposób.

Zatem liczb z dwoma zerami jest $3 \cdot 1 = 3$.

$$294 + 63 + 3 = 360$$

II sposób

Liczby czterocyfrowe są postaci $a_1 a_2 a_3 a_4$.

Gdy $a_1 = 1$, to cyfrę 2 możemy postawić na $\binom{3}{1} = 3$ sposoby.

Na pozostałych pozycjach stawiamy cyfry różne od 1, 2.

Można to zrobić na $8 \cdot 8 = 64$ sposoby.

Zatem takich liczb jest $3 \cdot 64 = 192$.

Gdy $a_1 \neq 0, 1, 2$, to cyfry 1, 2 możemy postawić na $\binom{3}{2} = 3$ sposoby.

Cyfrę a_1 możemy wybrać na 7 sposobów.

Na ostatnie wolnej pozycji stawiamy cyfrę różną od 1, 2.

Można to zrobić na 8 sposobów.

Zatem takich liczb jest $3 \cdot 7 \cdot 8 = 168$.

$$192 + 168 = 360$$

Zadanie 6.**Rozwiązanie**

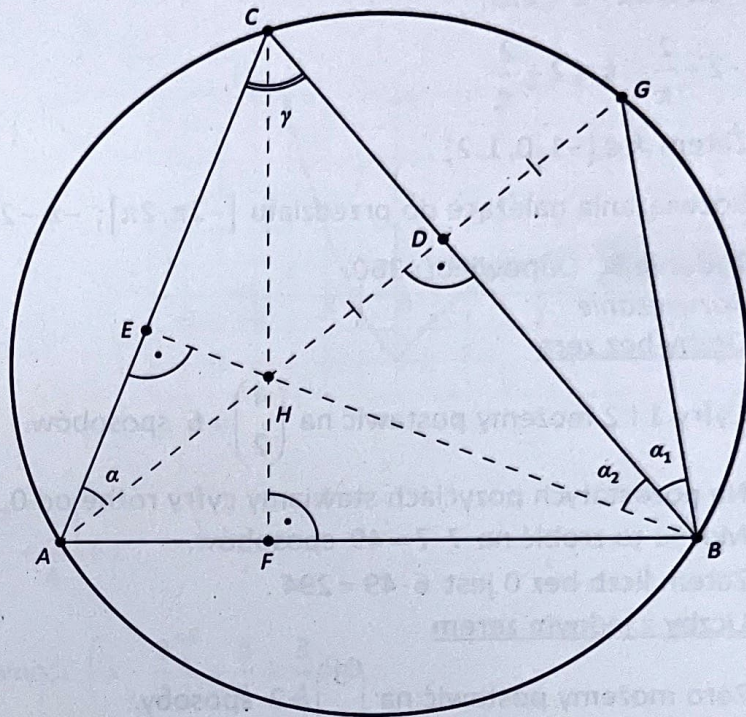
Oznaczenia takie jak na rysunku obok.

$\alpha = \alpha_1$ – kąty oparte na tym samym łuku

$\alpha = \alpha_2$ – bo $\alpha + \gamma = 90^\circ$ oraz $\alpha_2 + \gamma = 90^\circ$

Zatem $\alpha_1 = \alpha_2$, czyli wysokość BD trójkąta BGH zawiera się w dwusiecznej, więc jest środkową.

Stąd też $|DH| = |DG|$.

**Zadanie 7.** Odpowiedź: $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ **Rozwiązanie**

Niech $|CD| = a$, $|CB| = b$, $|DE| = d$.

Twierdzenie o dwusiecznej

$$\frac{a}{7-a} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 5a = 63 - 9a \Leftrightarrow 14a = 63 \Leftrightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$\frac{b}{9-b} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5b = 63 - 7b \Leftrightarrow 12b = 63 \Leftrightarrow b = \frac{21}{4}$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABC

$$\cos \gamma = \frac{|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AC| \cdot |BC|} = \frac{81 + 49 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{105}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{5}{6}$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta EDC

$$d^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma = \frac{441}{16} + \frac{81}{4} - 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{21}{4} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$\frac{441 + 324 - 630}{16} = \frac{135}{16}$$

$$d = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

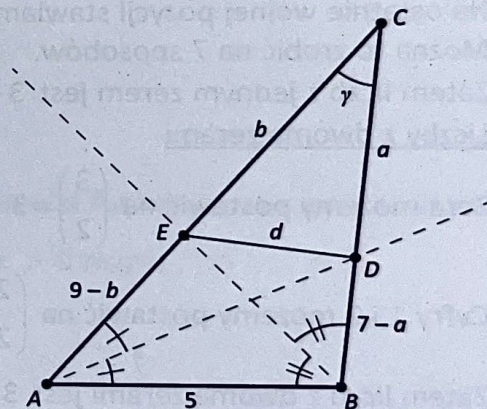
Zadanie 8.1. Odpowiedź: $S_1 = (3, -1)$, $r_1 = \sqrt{5}$; $S_2 = (-3, 1)$, $r_2 = 3\sqrt{5}$ **Rozwiązanie**

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 35 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 45$$

$$S_1 = (3, -1), r_1 = \sqrt{5}$$

$$S_2 = (-3, 1), r_2 = 3\sqrt{5}$$



Zadanie 8.2. Odpowiedź: $A = \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $B = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Rozwiązanie

Współrzędne punktów przecięcia okręgów są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - 35 = 0 \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$2(x^2 + y^2) - 30 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 15$$

Podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy

$$15 - 6x + 2y + 5 = 0$$

$$y = 3x - 10$$

Podstawiamy do pierwszego równania przekształconego do postaci $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

$$(x-3)^2 + (3x-9)^2 = 5$$

$$10(x-3)^2 = 5$$

$$(x-3)^2 = \frac{1}{2}$$

Zatem

$$x-3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x-3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Zadanie 8.3. Odpowiedź: $y = -2x + 10$; $y = \frac{1}{2}x - 5$

Rozwiązanie

$$S_1 = (3, -1), r_1 = \sqrt{5}$$

$$S_2 = (-3, 1), r_2 = 3\sqrt{5}$$

Wspólne styczne nie są prostopadłe do osi układu współrzędnych, więc można je opisać równaniem kierunkowym.

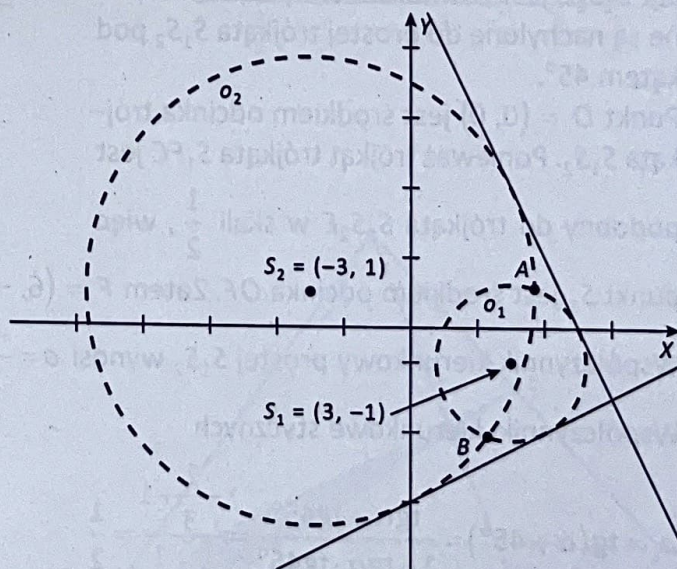
$$y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$$

Wykorzystując wzór na odległość punktu od prostej otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{|3a+1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5} \\ \frac{|-3a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Dzieląc stronami otrzymujemy

$$\frac{|3a+1+b|}{|-3a-1+b|} = \frac{1}{3}$$



$$3|3a+1+b| = |-3a-1+b|$$

$$9a + 3 + 3b = -3a - 1 + b \text{ lub } 9a + 3 + 3b = 3a + 1 - b$$

$$2b = -12a - 4 \text{ lub } 4b = -6a - 2$$

$$b = -6a - 2 \text{ lub } b = -\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$$

Podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy

$$|-3a-1| = \sqrt{5(a^2+1)} \text{ lub } \left| \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} \right| = \sqrt{5(a^2+1)}$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5 \text{ lub } \frac{9}{4}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{1}{4} = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 + 6a - 4 = 0 \text{ lub } 11a^2 - 6a + 19 = 0$$

$$\text{Rozwiązania pierwszego równania } a = -2 \text{ lub } a = \frac{1}{2}$$

Drugie równanie nie ma rozwiązań ($\Delta = 36 - 4 \cdot 11 \cdot 19 < 0$).

Zatem

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 10 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -5 \end{cases}$$

Równania stycznych

$$y = -2x + 10$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5$$

II sposób

$$S_1 = (3, -1), r_1 = \sqrt{5}; S_2 = (-3, 1), r_2 = 3\sqrt{5}$$

Oznaczenia takie jak na rysunku

$$|S_1S_2| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta S_1S_2E ,

wynika, że $|S_1E| = \sqrt{40 - 20} = 2\sqrt{5}$, czyli trójkąt S_1S_2E jest równoramienny. Zatem styczne są nachylone do prostej trójkąta S_1S_2 pod kątem 45° .

Punkt $O = (0, 0)$ jest środkiem odcinka trójkąta S_1S_2 . Ponieważ trójkąt S_1FC jest

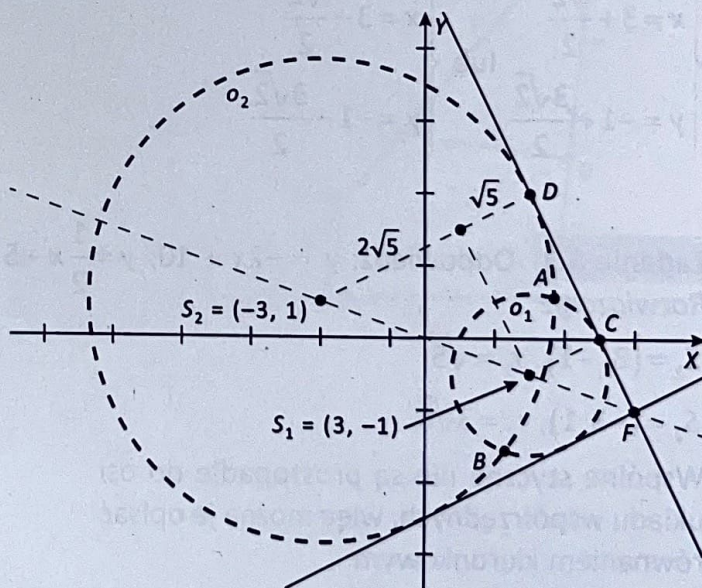
podobny do trójkąta S_1S_2E w skali $\frac{1}{2}$, więc

punkt S_1 jest środkiem odcinka OF . Zatem $F = (6, -2)$.

Współczynnik kierunkowy prostej S_1S_2 wynosi $a = \frac{-1-1}{3+3} = -\frac{1}{3} = \text{tg} \alpha$.

Współczynniki kierunkowe stycznych

$$a_1 = \text{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} 45^\circ}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{3} + 1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$



$$a_2 = \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}45^\circ}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}45^\circ} = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{1 - \frac{1}{3}} = -2$$

Równania stycznych

$$y = \frac{1}{2}(x - 6) - 2 = \frac{1}{2}x - 5$$

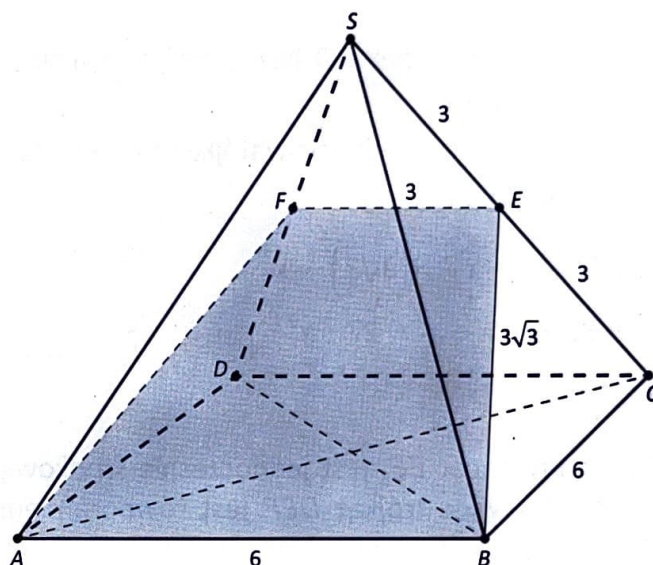
$$y = -2(x - 6) - 2x + 10$$

Zadanie 9.1. Odpowiedź: $P = \frac{27}{4}\sqrt{11}$

Rozwiązanie

Przekrojem jest trapez $ABEF$ (rysunek obok)

o podstawach $|AB| = 6$, $|EF| = 3$ oraz ramionach $|AF| = |BE| = 3\sqrt{3}$.

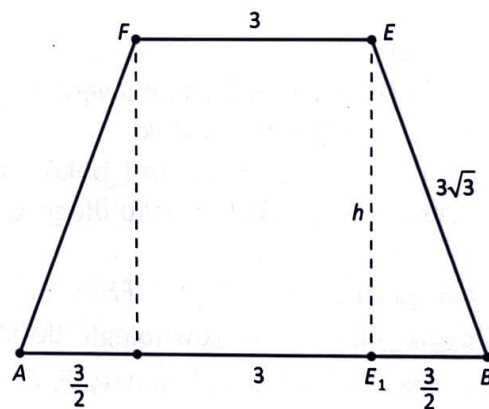


Wysokość trapezu

$$h = \sqrt{27 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{99}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{11}$$

Pole trapezu

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{11} = \frac{27}{4}\sqrt{11}$$



Zadanie 9.2. Odpowiedź: $|EF| = 3\sqrt{3}$.

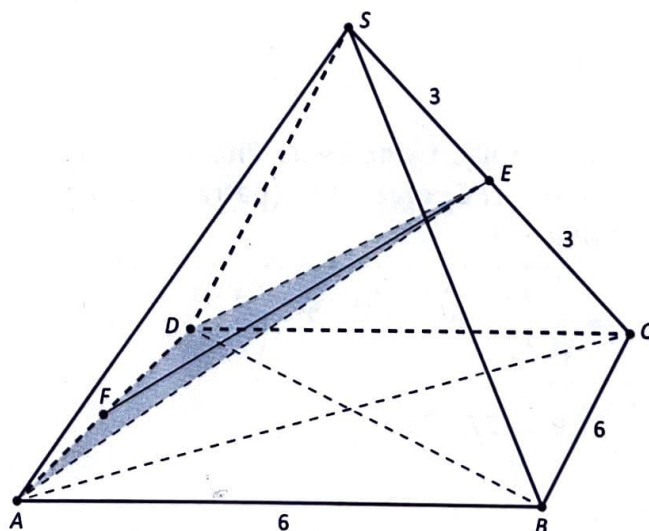
Rozwiązanie

Odcinek EF jest środkową w trójkącie AED (rysunek) o bokach

$$|AD| = 6, |DE| = 3\sqrt{3}, |AE| = 3\sqrt{5}.$$

Długość odcinka AE obliczamy wykorzystując trójkąt prostokątny AES .

$$|AE| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

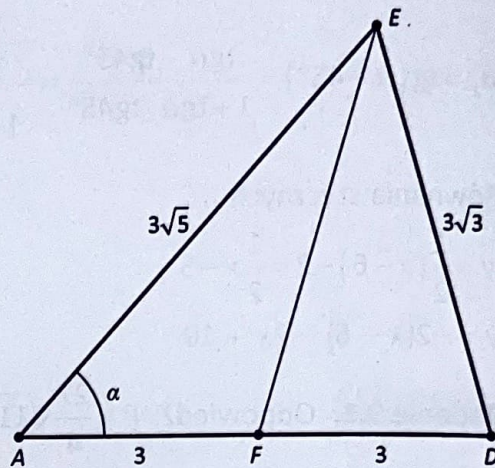


Twierdzenie cosinusów dla trójkątów ADE i AFE

$$\cos \alpha = \frac{36 + 45 - 27}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{54}{36\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$|EF|^2 = 9 + 45 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2\sqrt{5}} = 54 - 27 = 27,$$

$$\text{stąd } |EF| = 3\sqrt{3}.$$



Można też wyznaczyć $|EF|$ bez odwoływania się do twierdzenia cosinusów.

Niech EE_1 będzie wysokością w trójkącie ADE oraz $|EE_1| = x$.

Twierdzenie Pitagorasa

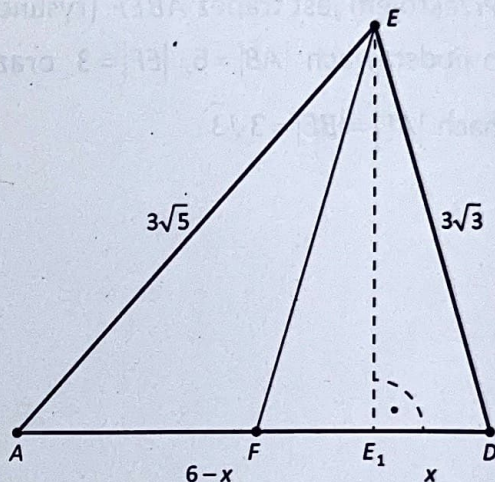
$$(3\sqrt{5})^2 - (6-x)^2 = (3\sqrt{3})^2 - x^2$$

$$45 - 36 + 12x - x^2 = 27 - x^2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Zatem wysokość EE_1 jest jednocześnie środkową w trójkącie DEF , więc trójkąt DEF jest równoramienny, czyli

$$|EF| = |ED| = 3\sqrt{3}.$$



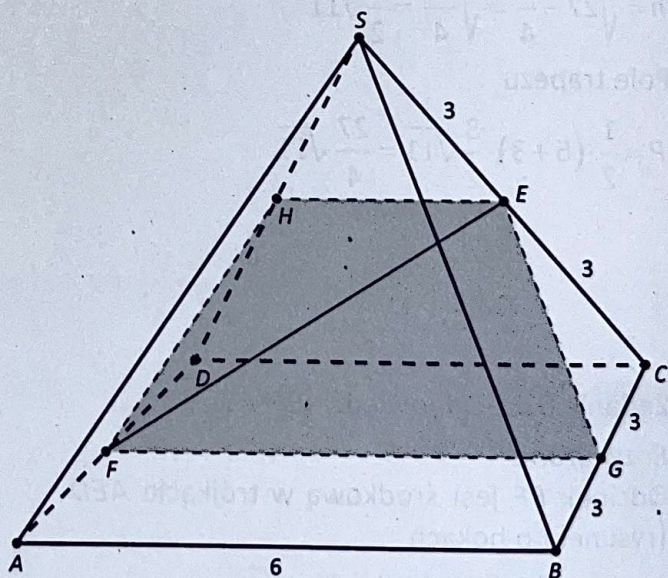
II sposób

Punkty G i H są środkami krawędzi odpowiednio BC i DS (patrz rysunek).

Punkty G i E są środkami boków trójkąta równobocznego BCS o boku długości 6, więc $|EG| = 3$.

Analogicznie $|EH| = 3$ oraz $|FH| = 3$.

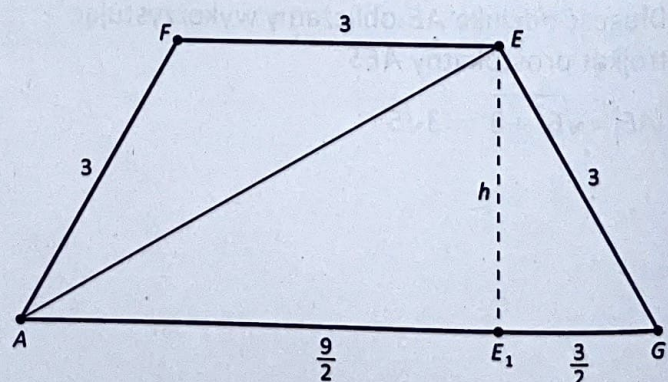
Odcinki FG i EH są równoległe do krawędzi DC , więc $FG \parallel EH$, czyli punkty F, G, E, H są wierzchołkami trapezu równoramiennego.



Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów EFE_1 oraz GEE_1 (patrz rysunek) otrzymujemy

$$|EF| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{72}{4} + 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$



Zadanie 10. Odpowiedź: $y = -2x + 10$, $|AB| = 5\sqrt{5}$, $A = (5, 0)$, $B = (0, 10)$

Rozwiązanie

Równanie prostej k

$$y = a(x-1) + 8, a \in (-\infty, 0)$$

Współrzędne punktów A, B

$$A = \left(\frac{a-8}{a}, 0\right), B = (0, -a+8)$$

Długość odcinka AB

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{a-8}{a}\right)^2 + (a-8)^2}$$

Niech

$$d(a) = \left(\frac{a-8}{a}\right)^2 + (a-8)^2 = (a-8)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 1\right), a \in (-\infty, 0)$$

Długość odcinka AB jest najmniejsza wtedy, gdy $d(a)$ jest najmniejsza.

Zatem

$$d'(a) = 2(a-8) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 1\right) + (a-8)^2 \cdot \frac{-2}{a^3} = 2(a-8) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 1 - \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^3}\right) =$$

$$2(a-8) \cdot \left(1 + \frac{8}{a^3}\right) = \frac{2(a-8)}{a^3} \cdot (a^3 + 8)$$

Uwzględniając dziedzinę funkcji d otrzymujemy

$$d'(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

$$d'(a) > 0 \Leftrightarrow a^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow a \in (-2, 0)$$

$$d'(a) < 0 \Leftrightarrow a^3 + 8 < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2)$$

a	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$
$d'(a)$	$-$	0	$+$
$D(a)$		Minimum lokalne	

W przedziale $(-\infty, 0)$ minimum jest wartością najmniejszą.

$$d(-2) = 100 \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) = 125$$

$$|AB| = 5\sqrt{5}$$

Równanie prostej $y = -2x + 10$, $|AB| = 5\sqrt{5}$, $A = (5, 0)$, $B = (0, 10)$

