

### Zadanie 1. (0-2)

Ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  określone są wzorami

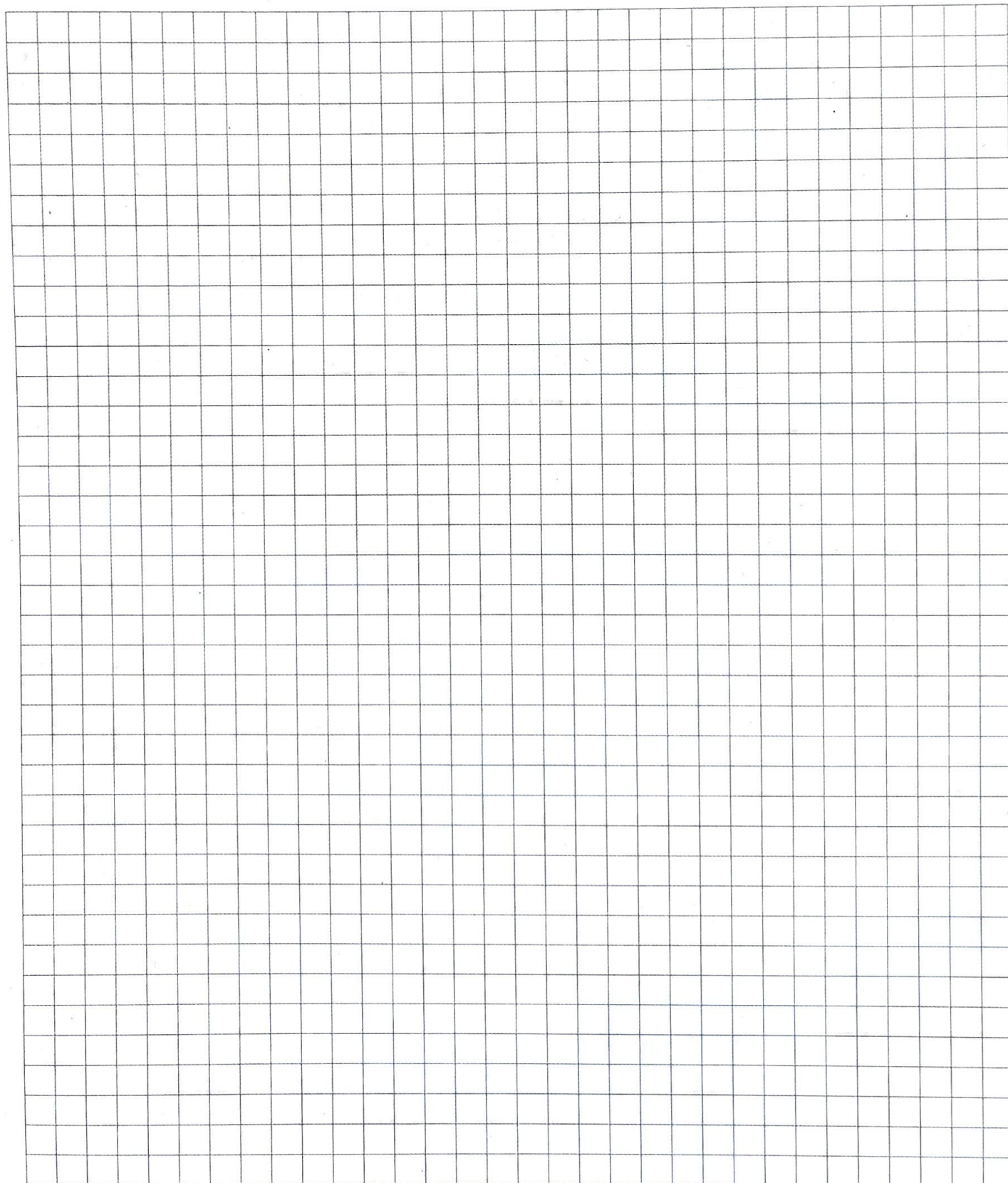
$$a_n = \sin n^\circ, \quad b_n = \cos n^\circ$$

dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

Czy liczba

$$\frac{a_{10} \cdot a_{70} + a_{80} \cdot a_{160}}{b_{20} \cdot b_{40} - b_{110} \cdot b_{130}}$$

jest liczbą wymierną? Odpowiedź uzasadnij.



## Zadanie 2.

Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = \log_a(x + b)$  dla  $x \in (-b, +\infty)$ ,

gdzie parametry  $a, b$  są pewnymi liczbami rzeczywistymi i  $a \in (0, +\infty)$  oraz  $a \neq 1$ .

### Zadanie 2.1. (0-2)

Wyznacz wartości parametrów  $a$  i  $b$  wiedząc, że do wykresu funkcji  $f$  należą punkty  $A = (-2, 0)$  oraz  $B = (0, 1)$ . Zapisz obliczenia.

### Zadanie 2.2. (0-3)

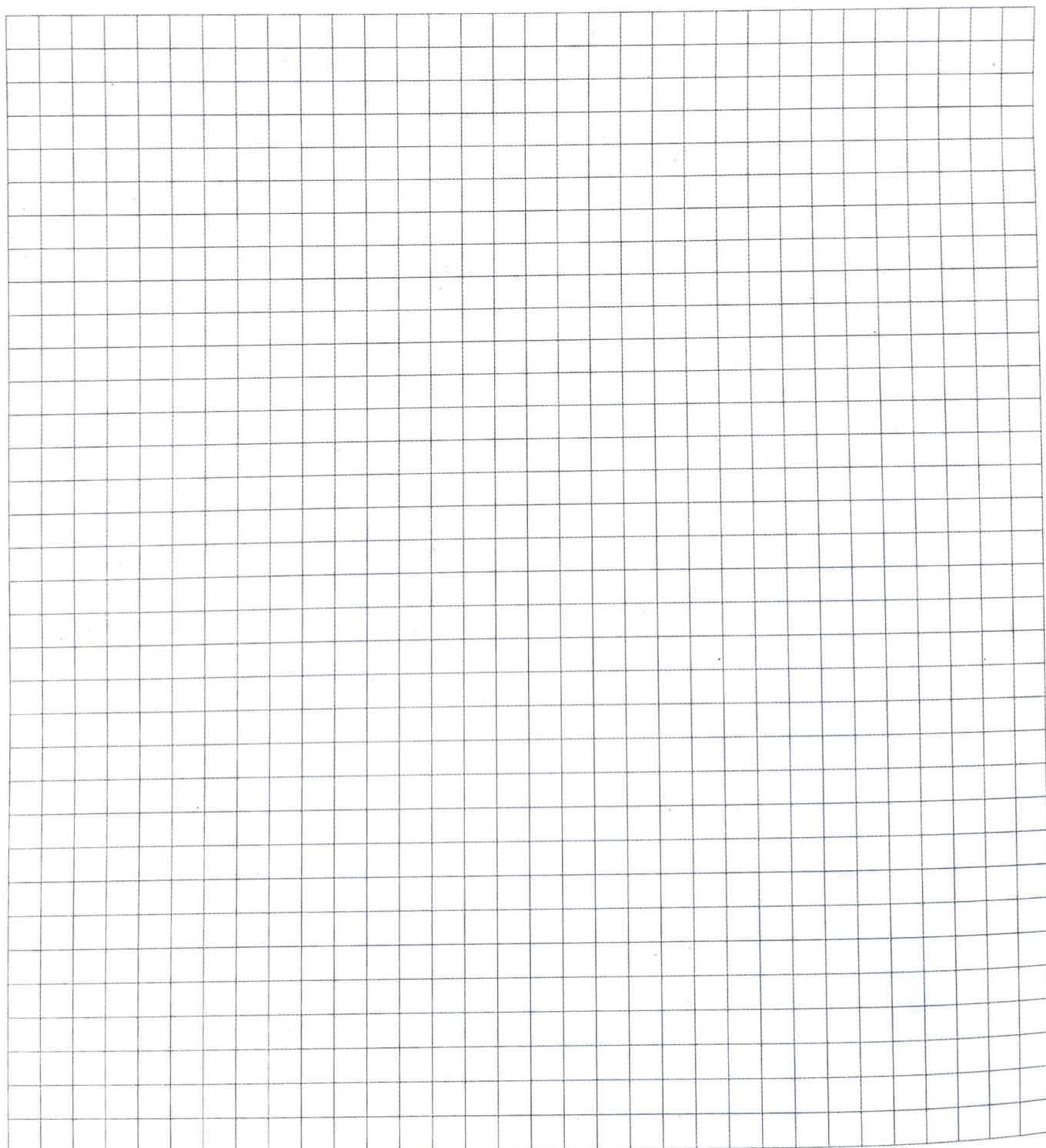
Naszkicuj wykresy funkcji:

$$g(x) = |f(x)|,$$

$$h(x) = g(x) - 1,$$

$$k(x) = |h(x)| - 2,$$

dla  $a = b = 3$ .



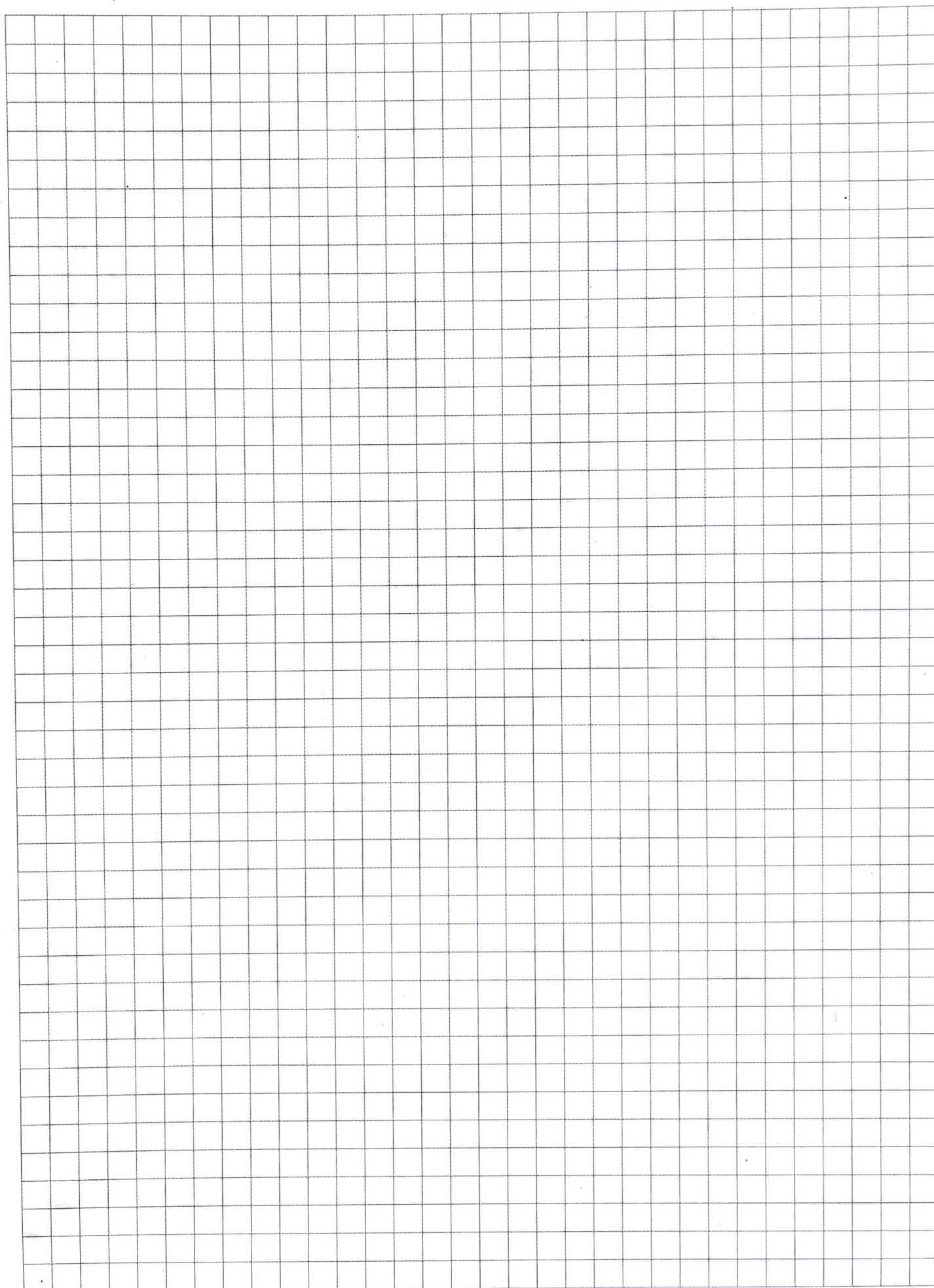


**Zadanie 2.3. (0-2)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$\left| \log_3(x+3) - 1 \right| = m + 2$$

ma cztery rozwiązania.

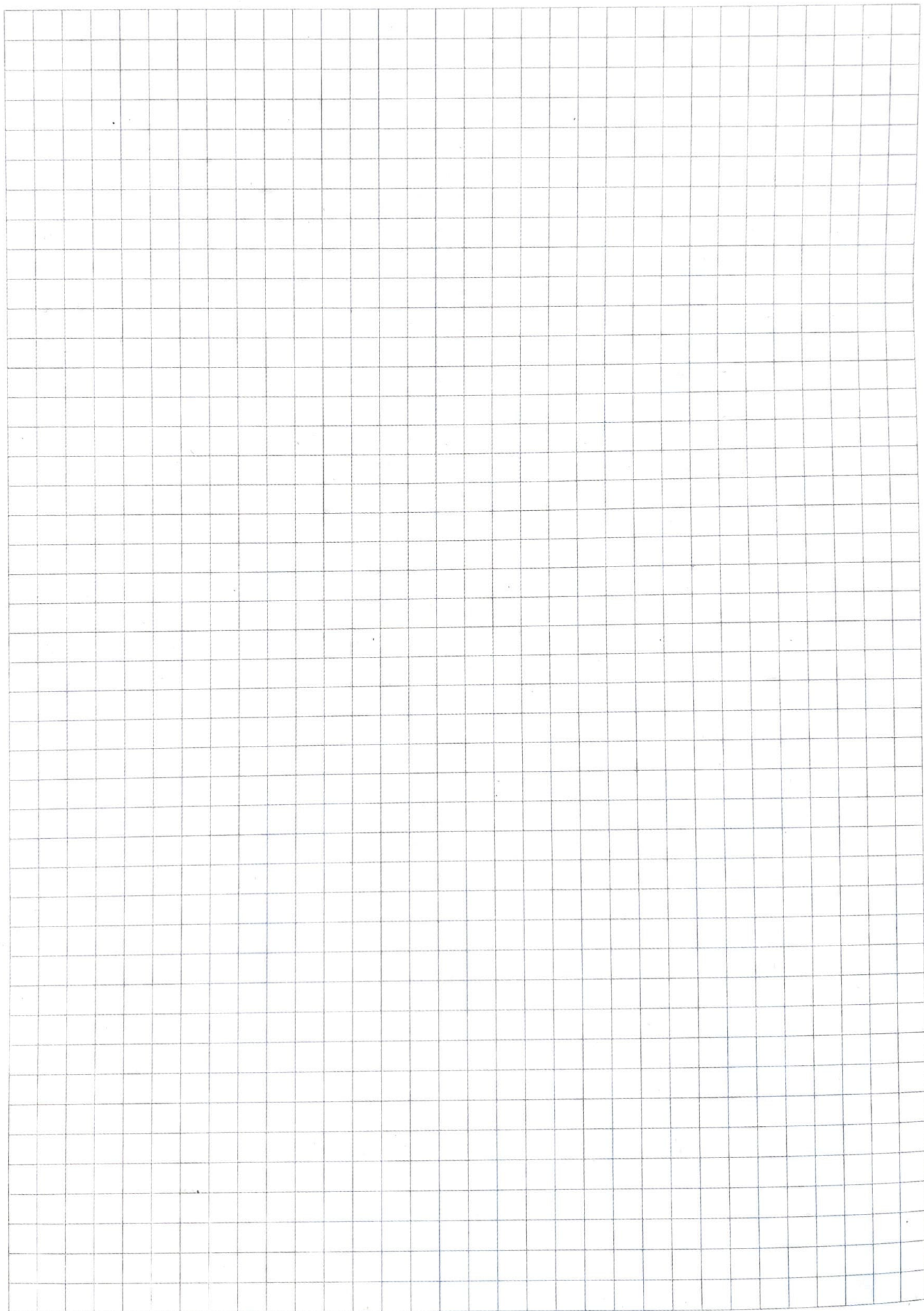


### Zadanie 3. (0-3)

Udowodnij, że równanie

$$\sin 2x + \sin \frac{3x}{2} = 2$$

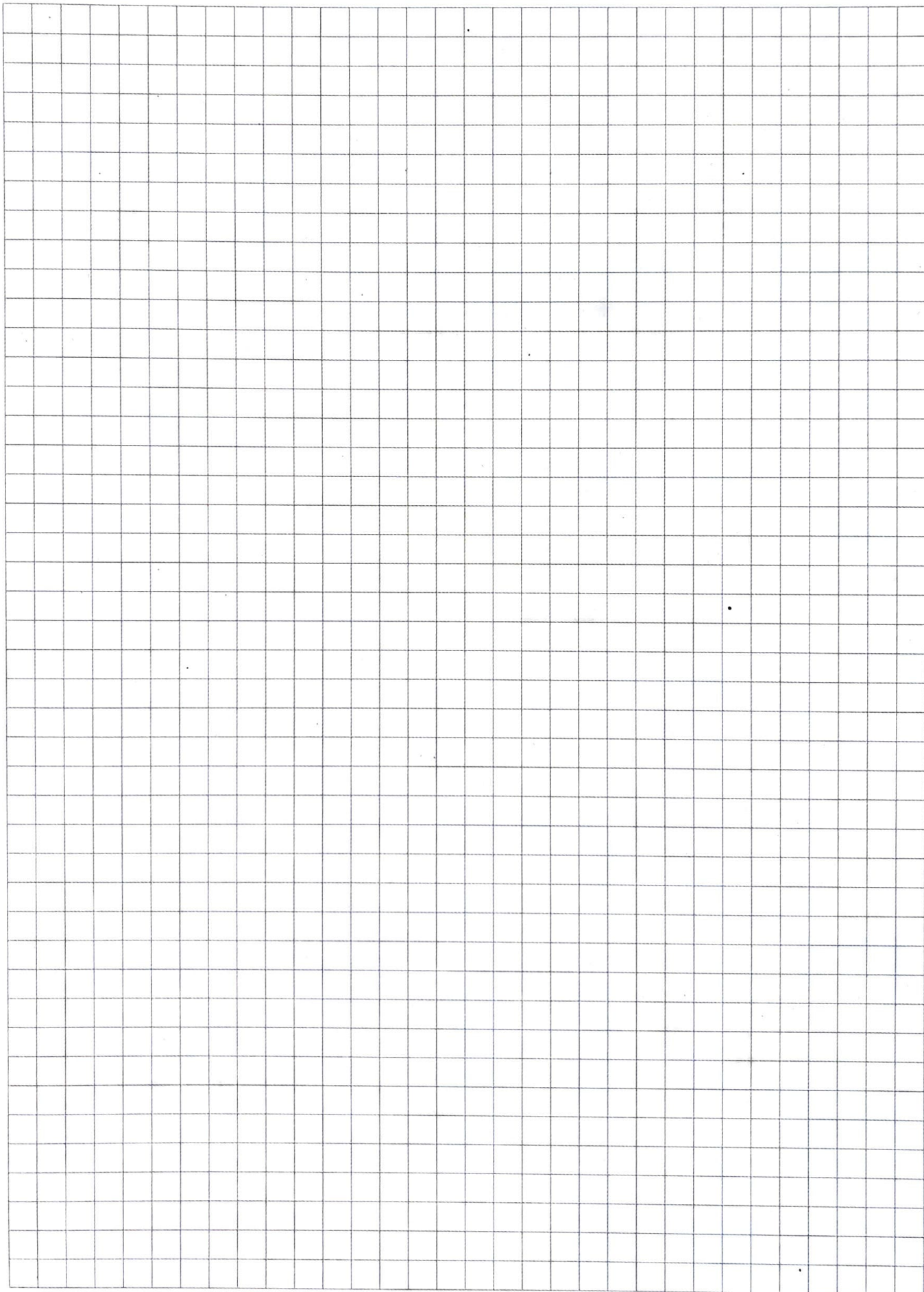
nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.





**Zadanie 4. (0-3)**

Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , dla  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie parametry  $a, b, c$  są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Funkcja  $g$  jest pochodną funkcji  $f$ , natomiast funkcja  $h$  jest pochodną funkcji  $g$ . Wykresy funkcji  $f, g, h$  przechodzą przez punkt  $A = (-1, 2)$ . Wyznacz liczby  $a, b, c$ . Zapisz obliczenia.

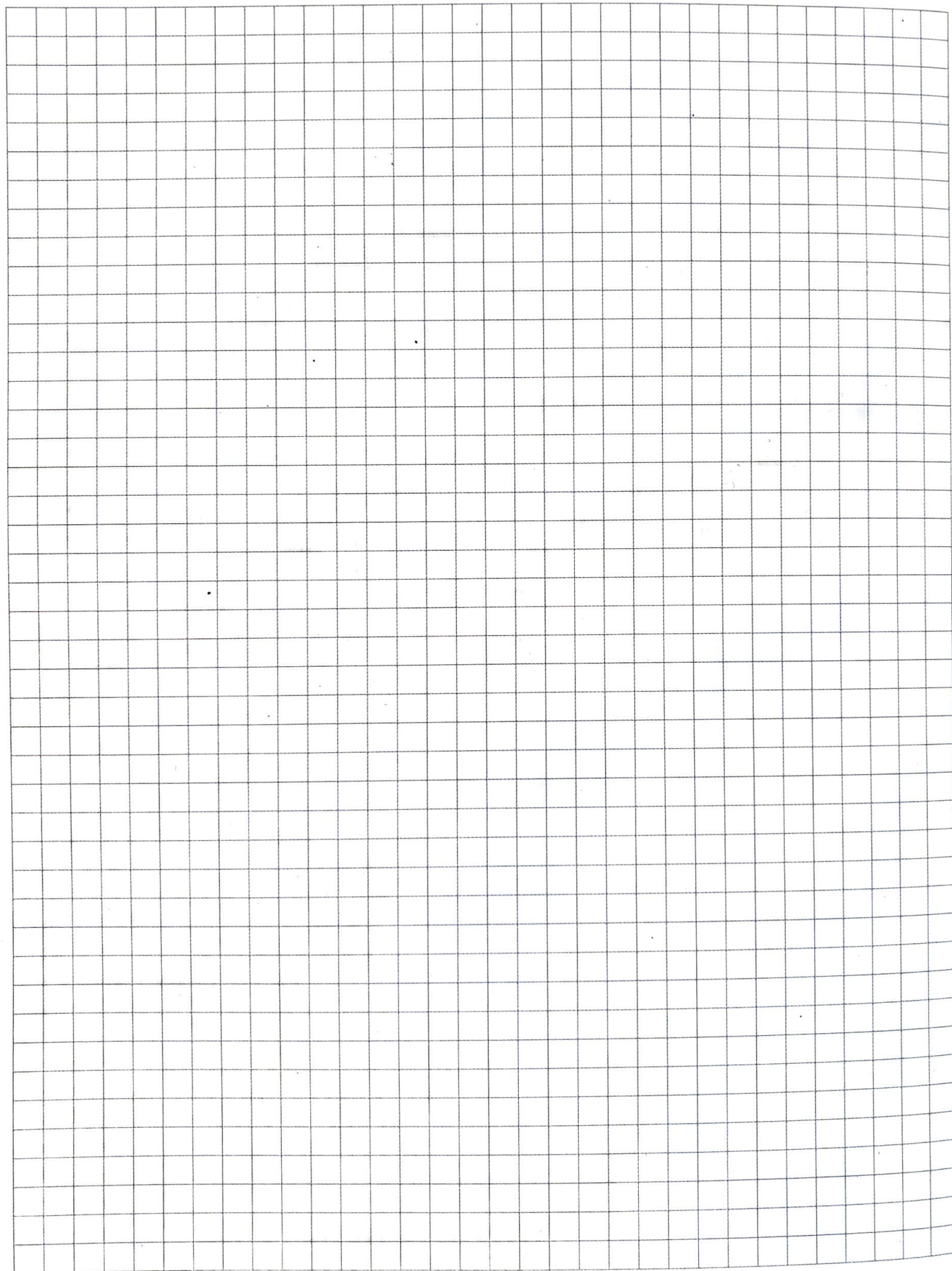


### Zadanie 5. (0-5)

Zdarzenie **A** oznacza, że w 10 rzutach monetą co najmniej 9 razy wypadnie orzeł.

Zdarzenie **B** oznacza, że w 6 rzutach sześcienną kostką co najmniej 5 razy wypadną co najwyżej dwa oczka.

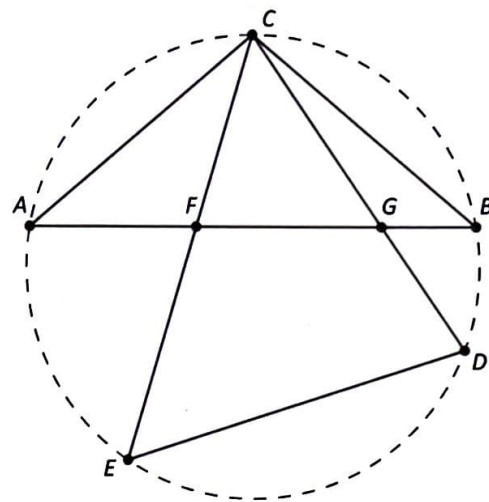
Oblicz, co jest bardziej prawdopodobne: zajście zdarzenia **A**, czy zdarzenia **B**. Zapisz obliczenia.





**Zadanie 6. (0-2)**

Na trójkącie równoramiennym rozwartokątnym  $ABC$  opisany jest okrąg. Cięciwy  $CD$  i  $CE$  przecinają podstawę trójkąta w punktach odpowiednio  $G$  i  $F$  (patrz rysunek). Udowodnij, że na czworokącie  $DEFG$  można opisać okrąg.

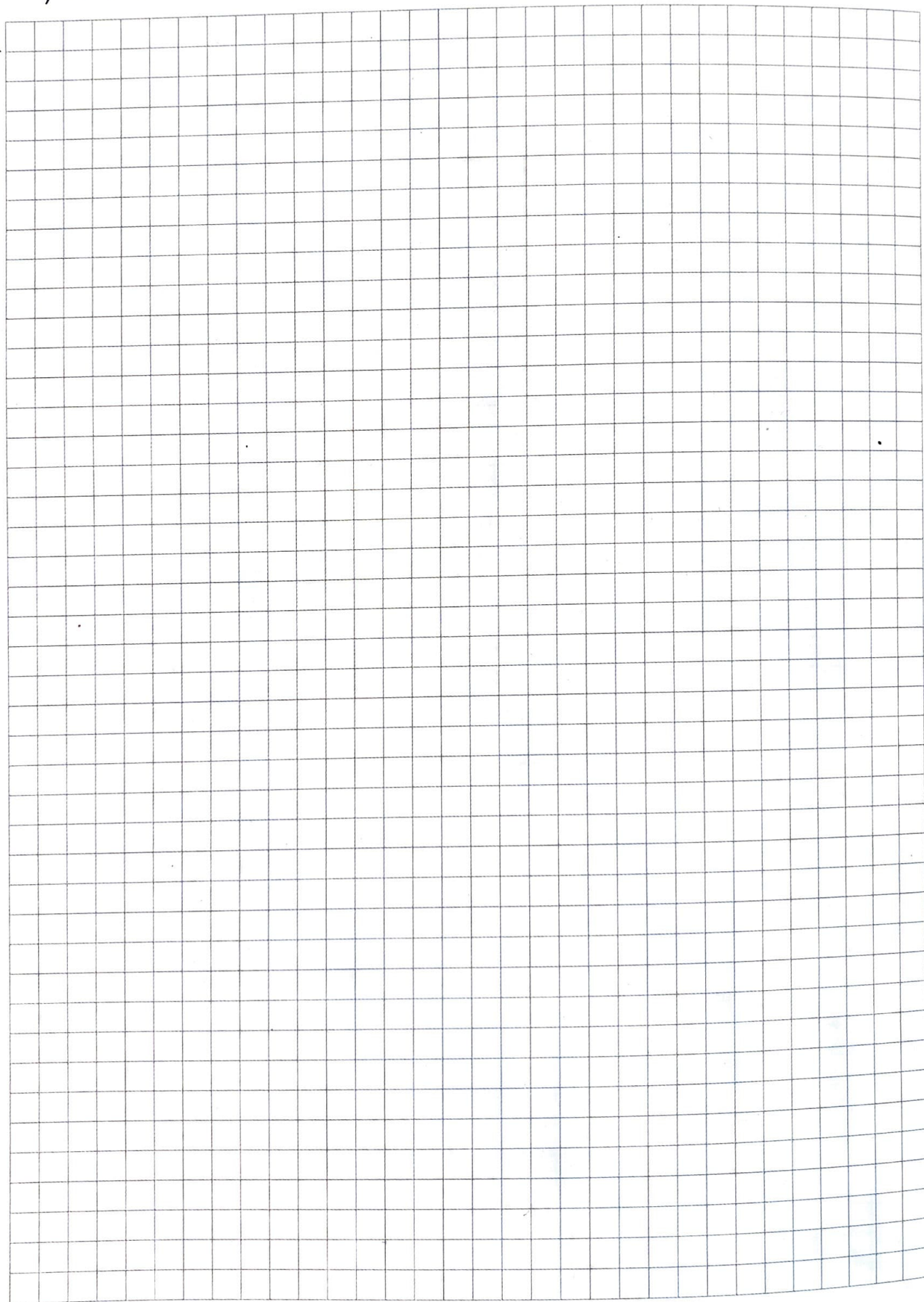


**Zadanie 7. (0-5)**

Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach  $|AB|=6$ ,  $|AC|=4$ ,  $|BC|=2\sqrt{7}$ .

Na bokach  $AB$  i  $AC$  tego trójkąta leżą punkty odpowiednio  $D$  i  $E$  takie, że  $|AD| = |DE| = |EC|$ .

- Wyznacz pole trójkąta  $ADE$ . Zapisz obliczenia.
- Udowodnij, że  $CD$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ .

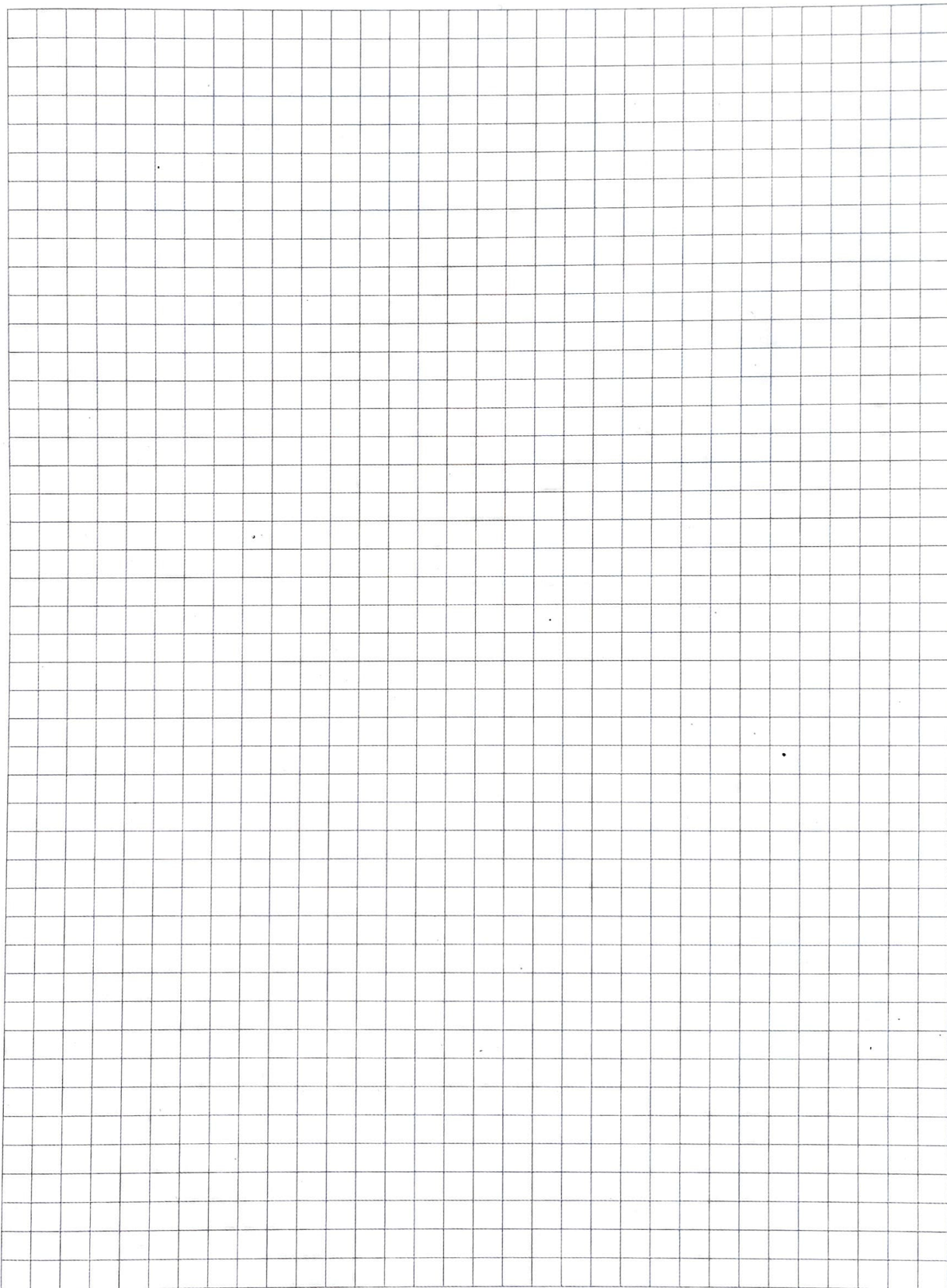




**Zadanie 8. (0-5)**

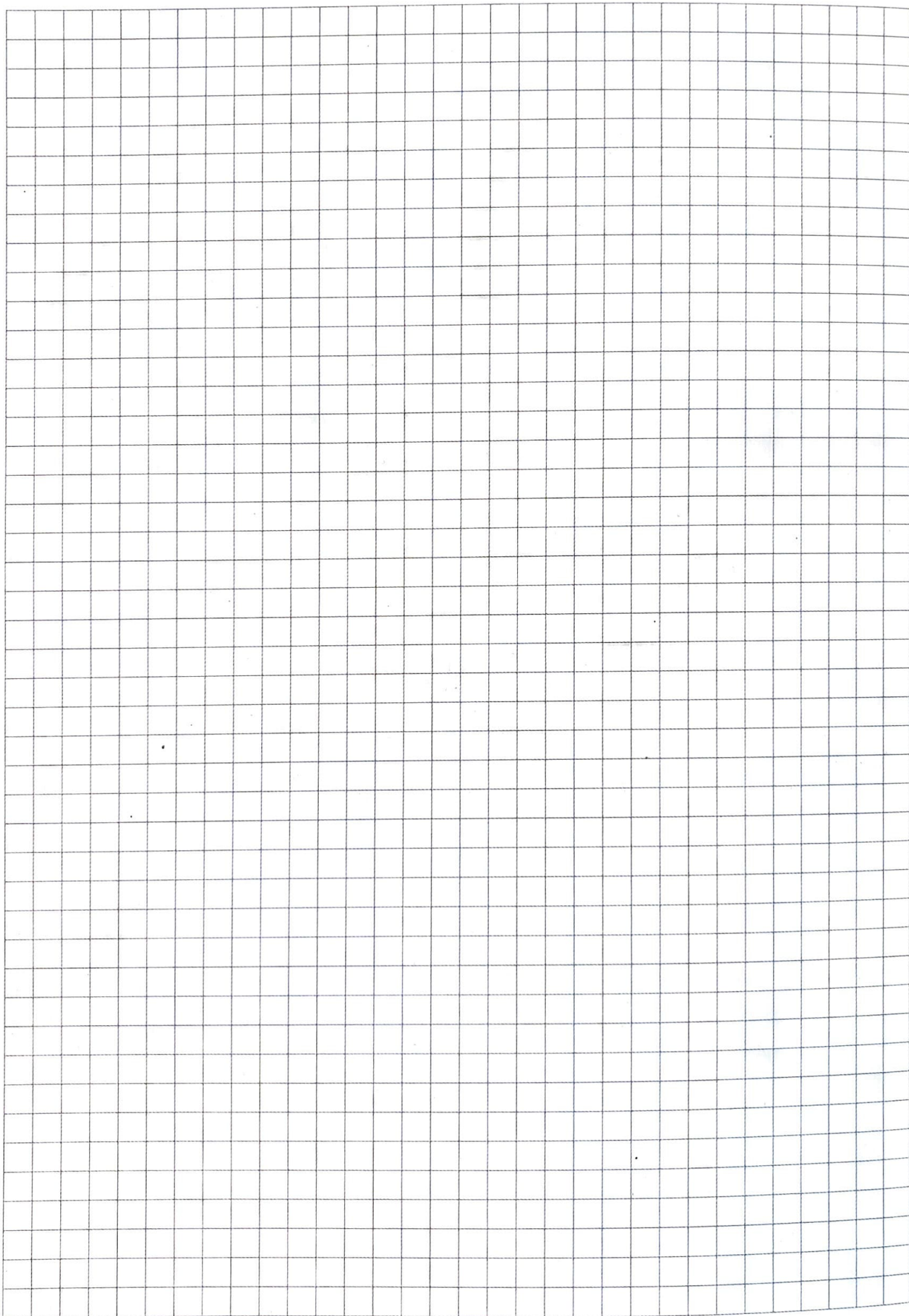
Proste o równaniach  $y = -x$  oraz  $y = -x + 4$  przecinają parabolę o równaniu  $y = x^2 - 4x$  w czterech punktach. Oblicz pole czworokąta którego wierzchołkami są powyższe punkty przecięcia.

Zapisz obliczenia.



**Zadanie 9. (0-6)**

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny  $ABCD$  o podstawie  $ABCD$  i polu podstawy równej  $P$ . Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem  $30^\circ$ . Punkt  $E$  jest środkiem krawędzi  $CS$ . Pole trójkąta  $DBE$  jest równe  $k \cdot P$ , gdzie  $k$  jest stałym współczynnikiem liczbowym. Oblicz współczynnik  $k$ . Zapisz obliczenia.





**Zadanie 10. (0-6)**

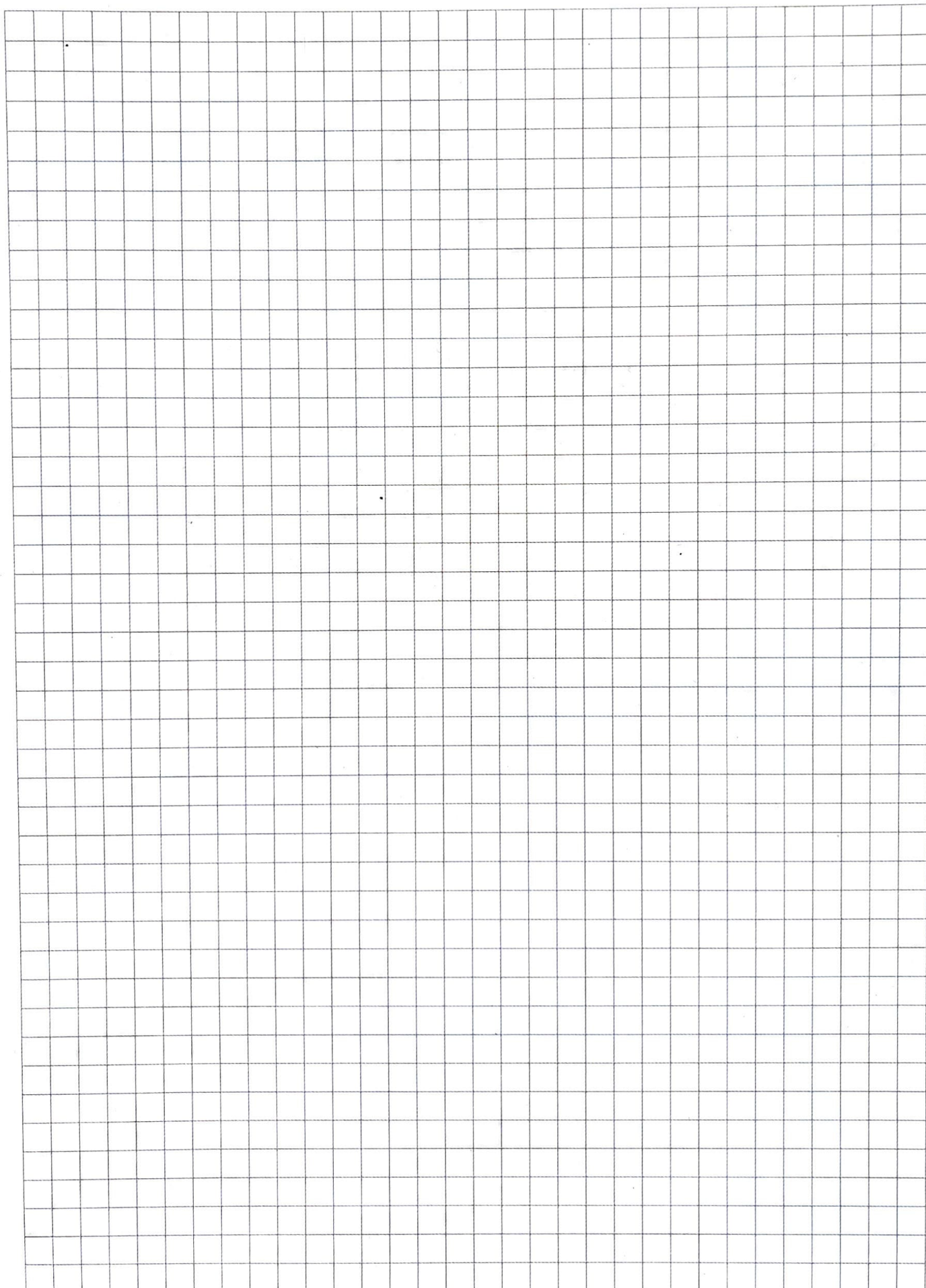
Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$mx^2 + (3m - 4)x + 2m - 4 = 0$$

ma rozwiązanie oraz każde rozwiązanie należy do zbioru rozwiązań nierówności

$$x^2 + x < 2.$$

Zapisz obliczenia.



**Zadanie 11. (0-6)**

Rozpatrujemy wszystkie proste  $k$  przechodzące przez punkt  $P = (2, 1)$ . Prosta  $k$  przecina dodatnią półoś  $OX$  w punkcie  $A$  oraz dodatnią półoś  $OY$  w punkcie  $B$ .

Wyznacz równanie tej prostej  $k$ , dla której pole trójkąta  $ABO$  jest najmniejsze, gdzie  $O = (0, 0)$ . Zapisz obliczenia.

