

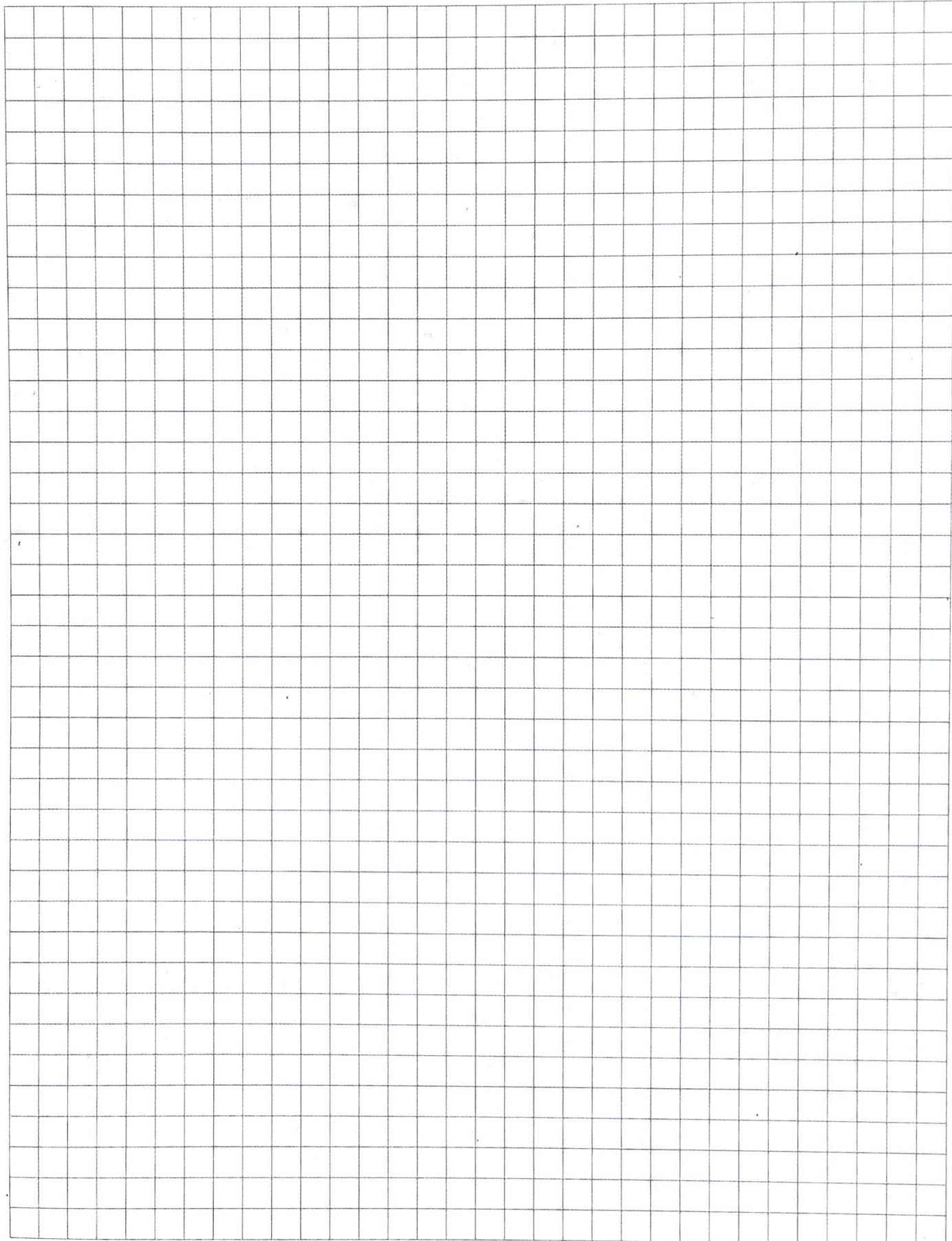
**Zadanie 1. (0-3)**

Ciąg  $(a_n)$  określony jest wzorem

$$a_n = \frac{2024}{n!} - \frac{\binom{n+2}{3} \cdot 3!}{(n+1)!}$$

dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

Oblicz, ile wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest dodatnich. Zapisz obliczenia.



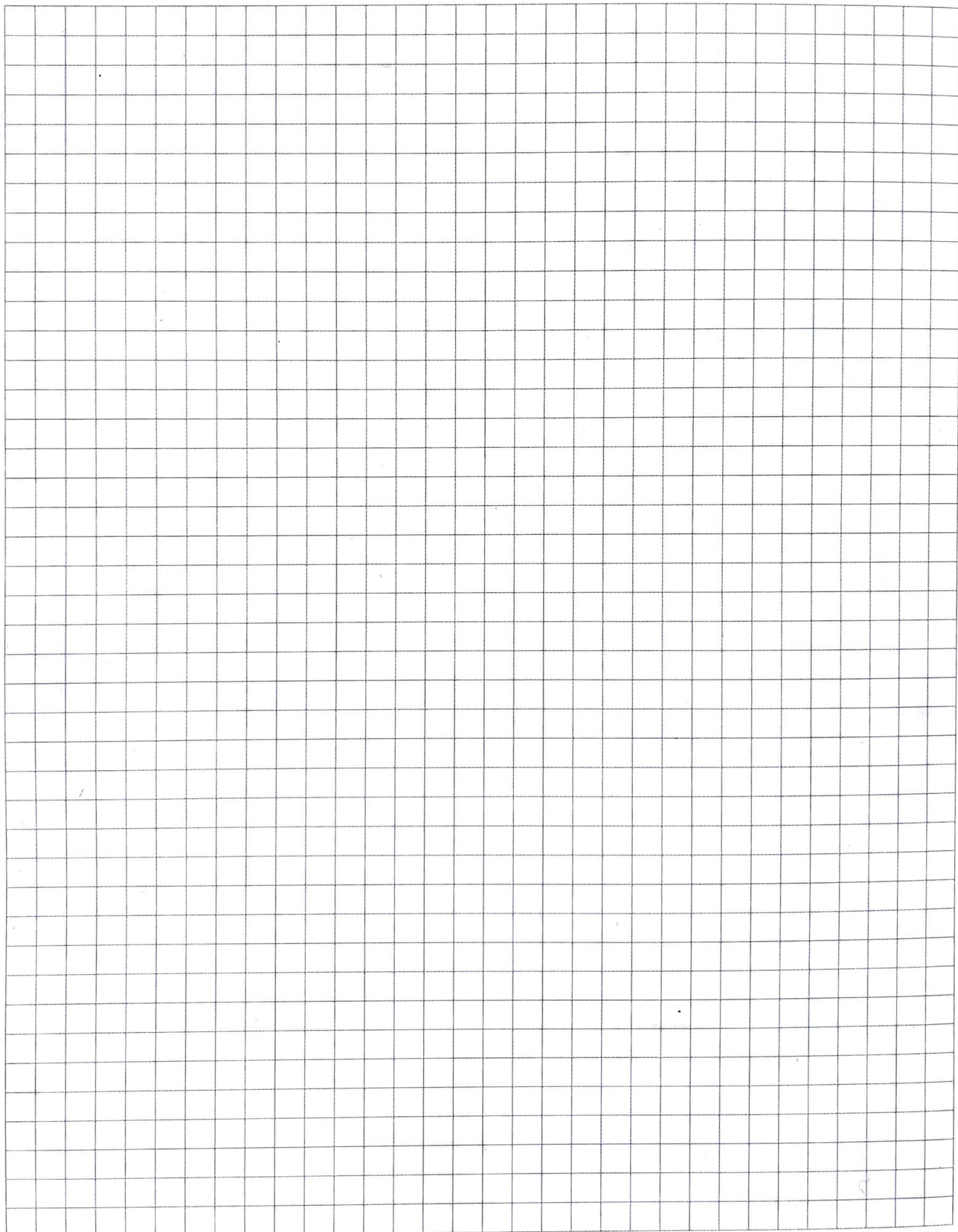
**Zadanie 2.**

Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = a^{x+b}$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,

gdzie wartości parametrów  $a, b$  są pewnymi liczbami rzeczywistymi i  $a \in (0, +\infty)$  oraz  $a \neq 1$ .

**Zadanie 2.1. (0-2)**

Wyznacz wartości parametrów  $a$  i  $b$  wiedząc, że do wykresu funkcji  $f$  należą punkty  $A = (-1, 1)$  oraz  $B = (0, 2)$ . Zapisz obliczenia.



**Zadanie 2.2. (0-3)**

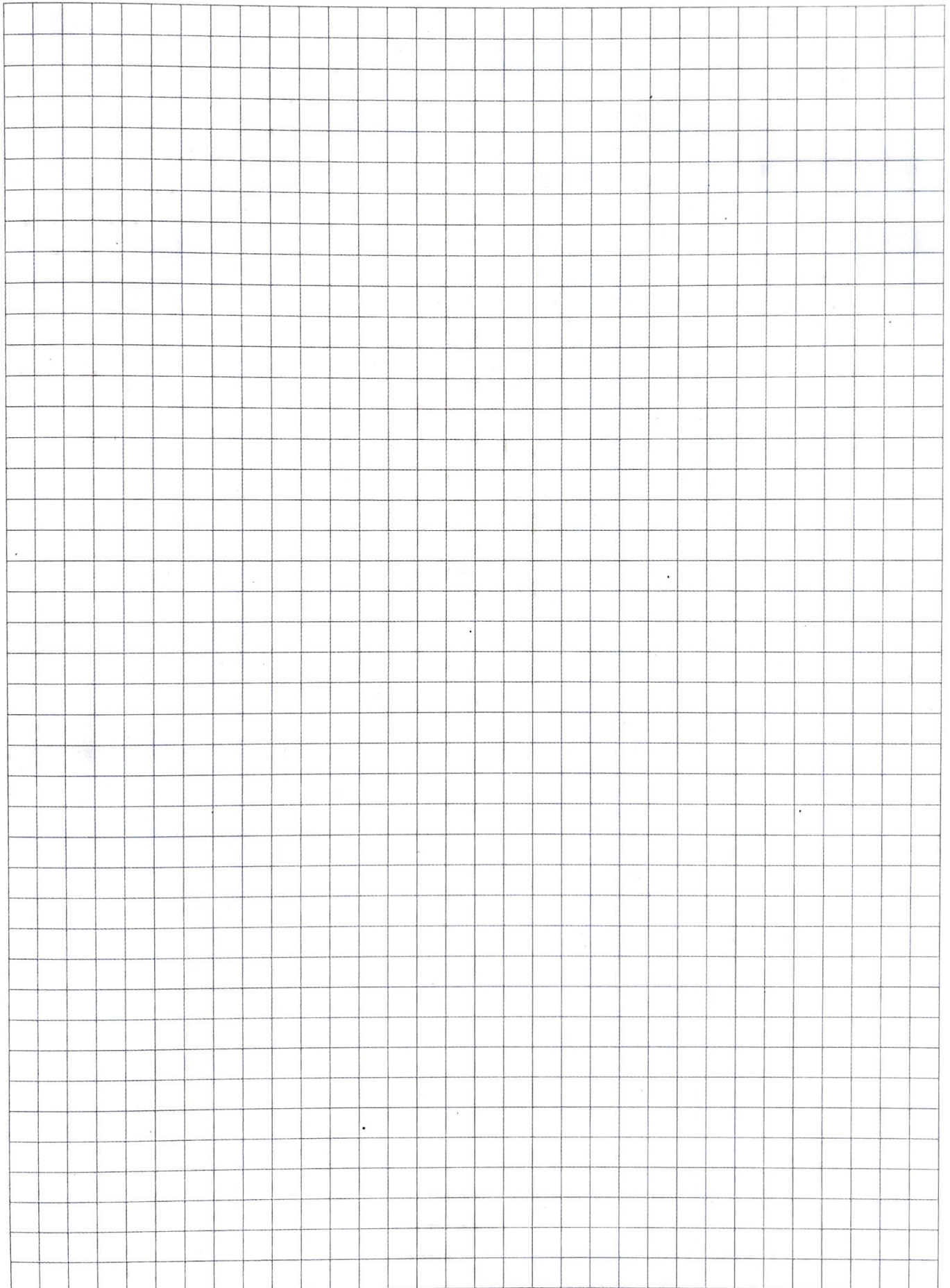
Naszkicuj wykresy funkcji:

$$g(x) = f(-x),$$

$$h(x) = g(x) - 2,$$

$$k(x) = |h(x)| - 1,$$

dla  $a = 2$  i  $b = 1$ .

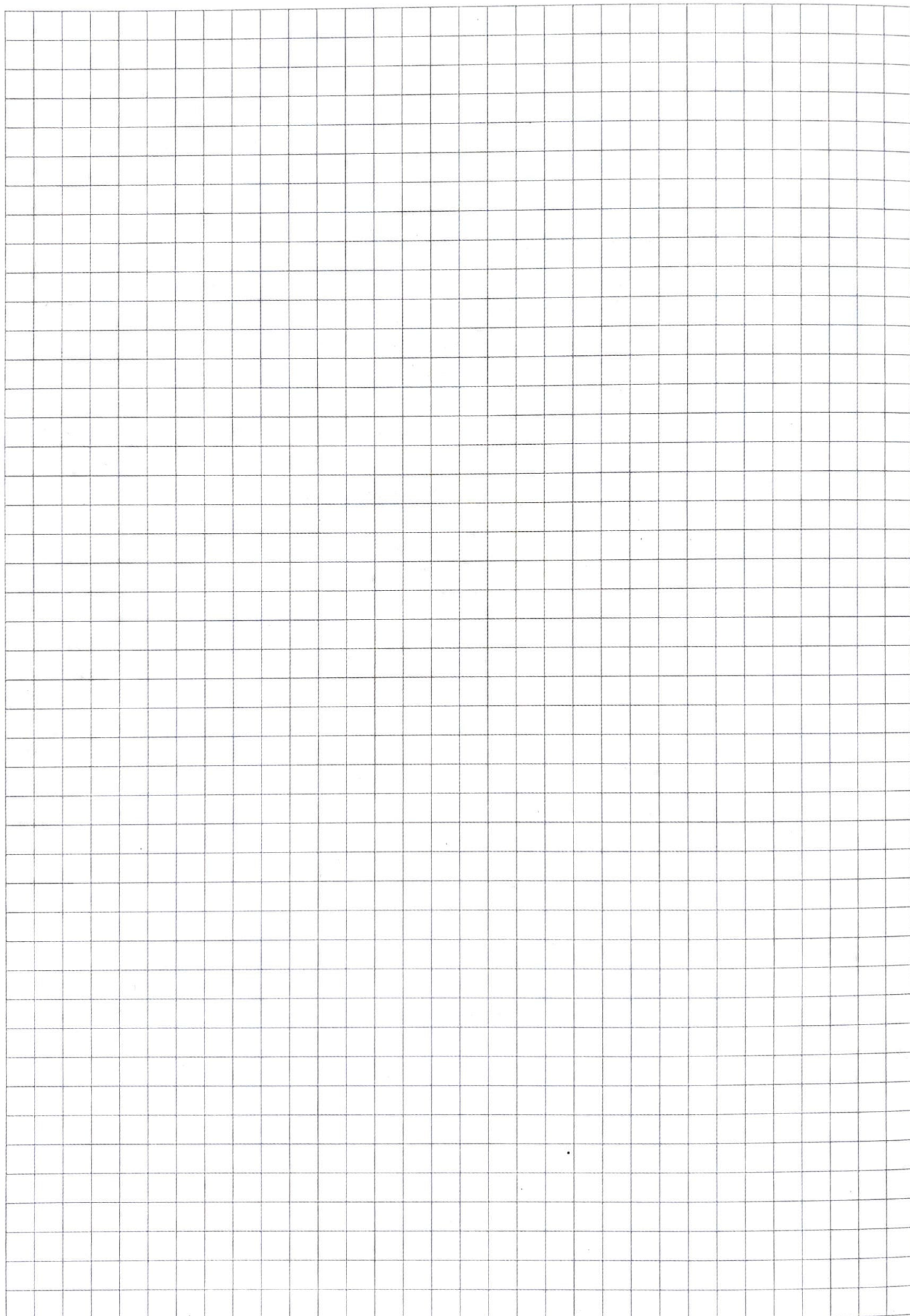


**Zadanie 2.3. (0-2)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$|2^{-x+1} - 2| = m + 1$$

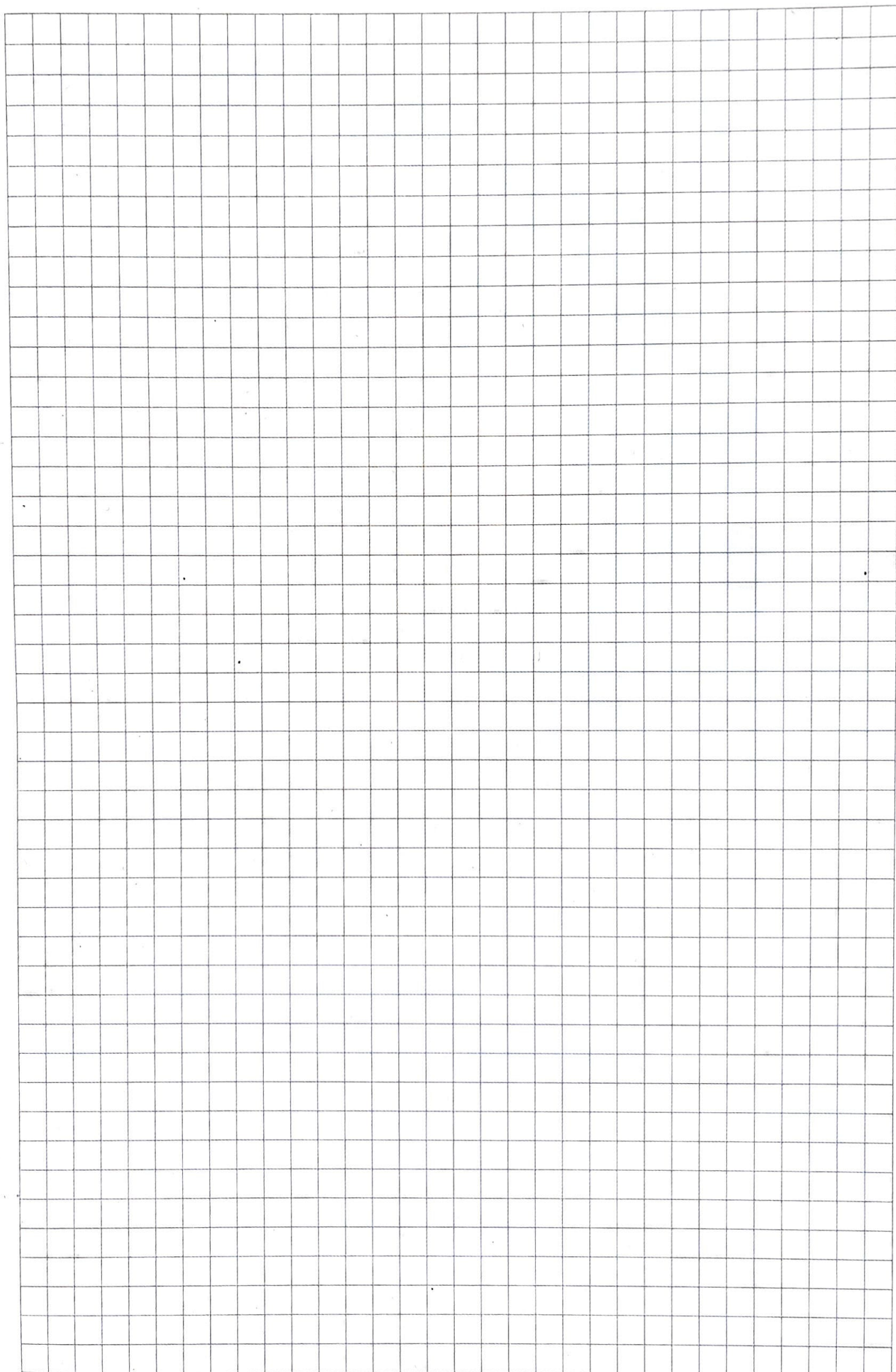
ma dwa rozwiązania. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 3. (0-3)**

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność

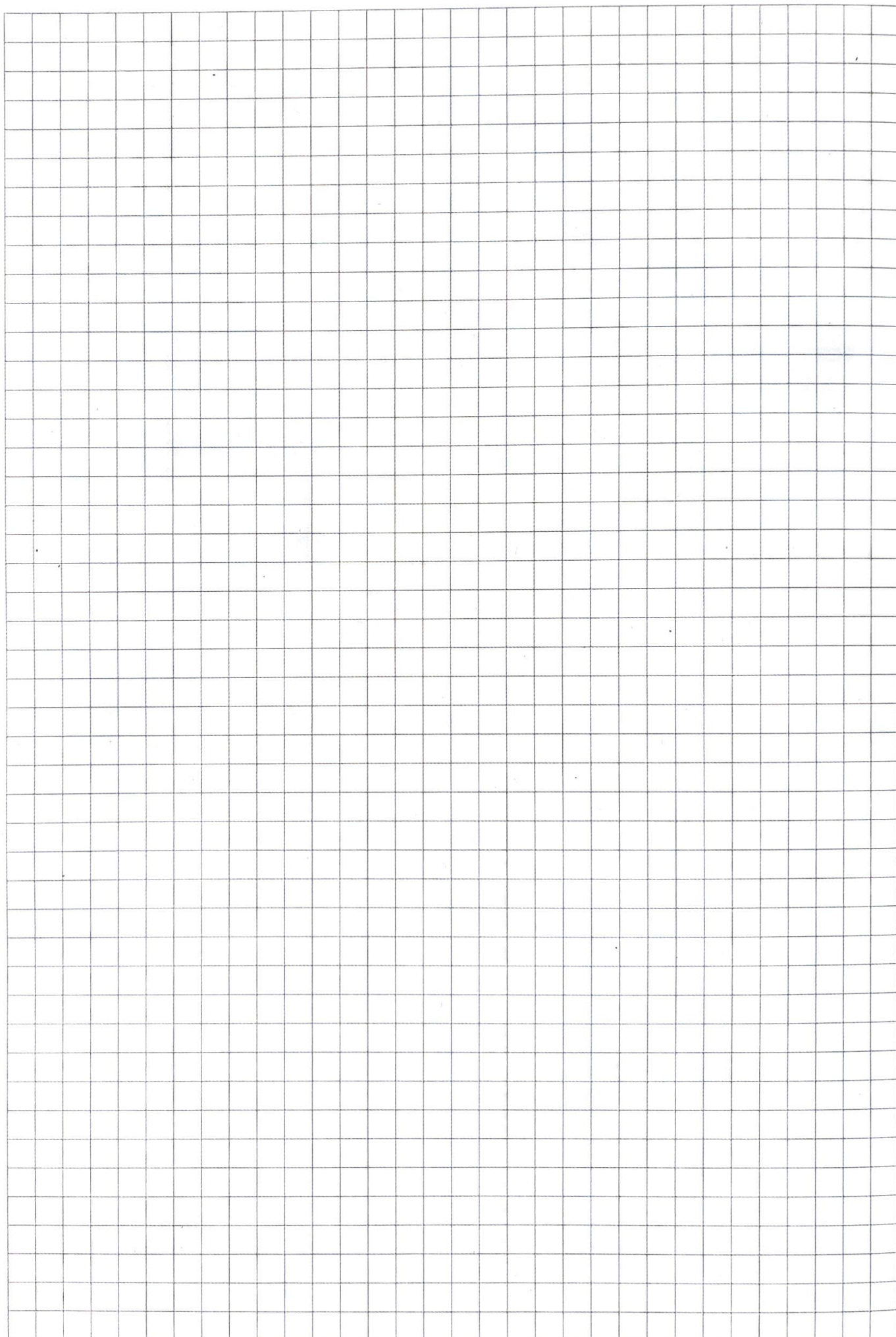
$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 > 0$$



**Zadanie 4. (0-3)**

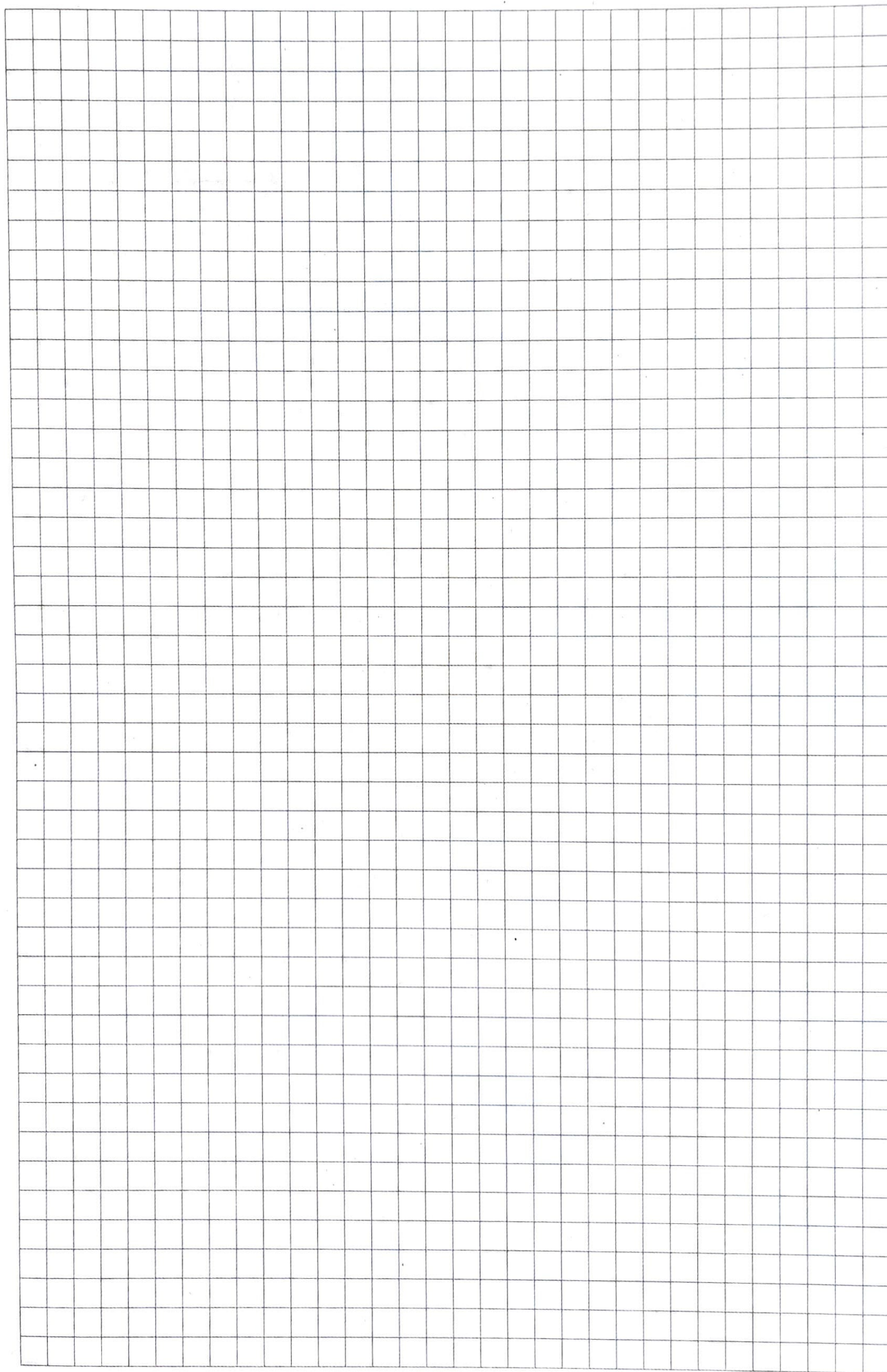
Wyznacz rozwiązania równania  $\operatorname{tg}(x + 1) = \operatorname{tg}(2x + 3)$  należące do przedziału  $[-2\pi, 2\pi]$ .

Zapisz obliczenia.



### Zadanie 5. (0-4)

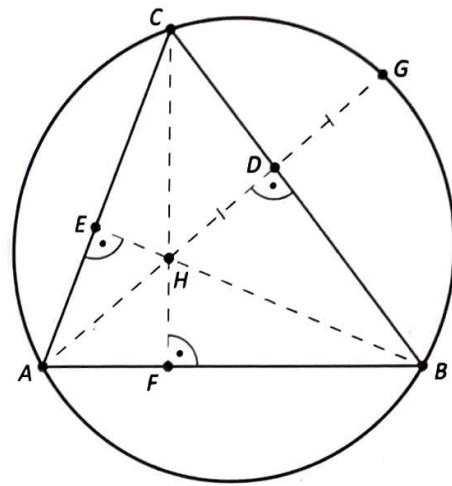
Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych, w których cyfra 2 występuje dokładnie jeden raz oraz cyfra 1 też występuje dokładnie jeden raz i cyfra 1 występuje przed cyfrą 2. Zapisz obliczenia.



### Zadanie 6. (0-3)

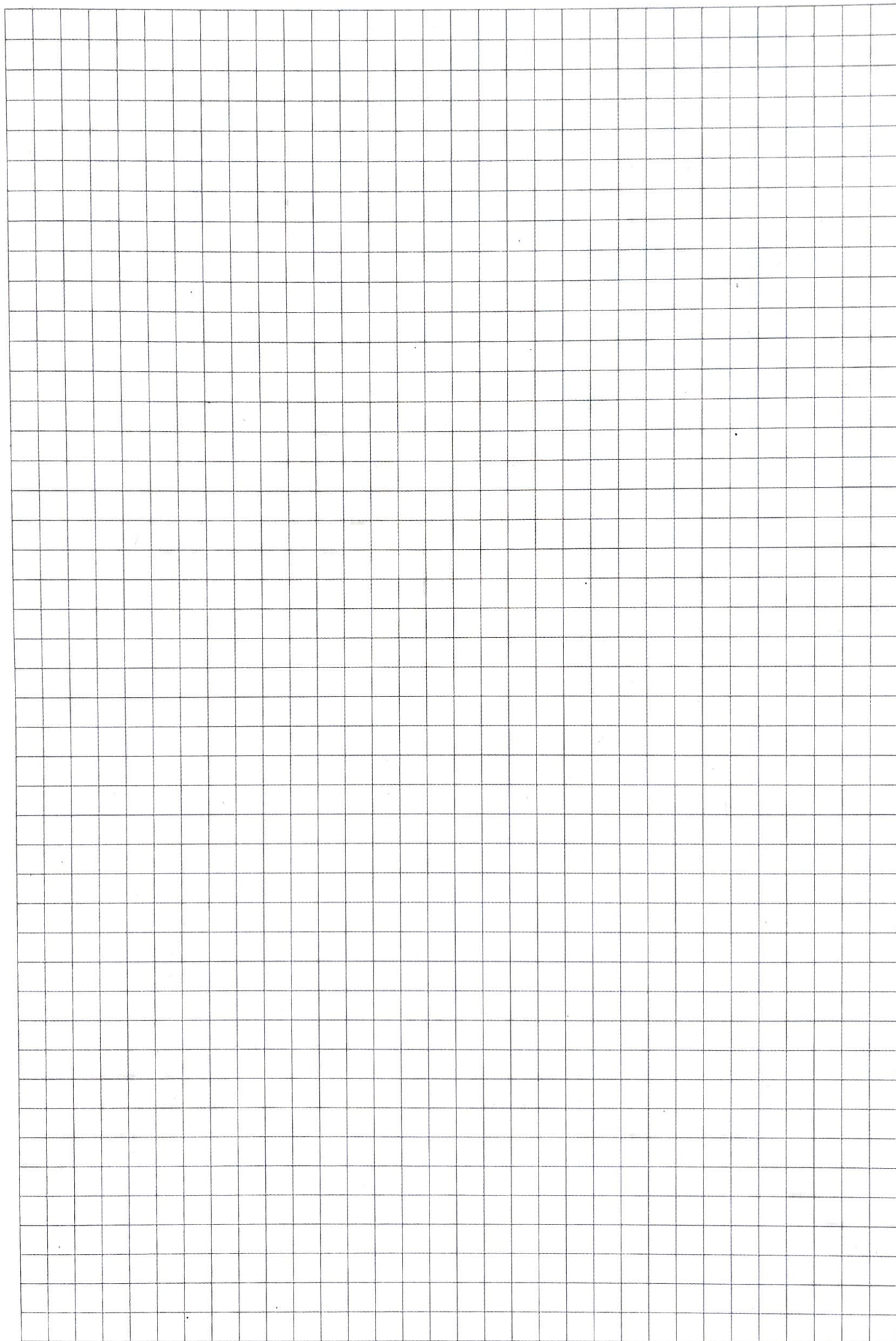
W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  wysokości  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  przecinają się w punkcie  $H$ . Prosta  $AD$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w punkcie  $G$  (patrz rysunek).

Udowodnij, że  $|DH| = |DG|$ .



**Zadanie 7. (0-4)**

Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 9$ ,  $|BC| = 7$ . Dwusieczna kąta przy wierzchołku  $A$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $D$ , natomiast dwusieczna kąta przy wierzchołku  $B$  przecina bok  $AC$  w punkcie  $E$ . Oblicz długość odcinka  $DE$ . Zapisz obliczenia.



### Zadanie 8.

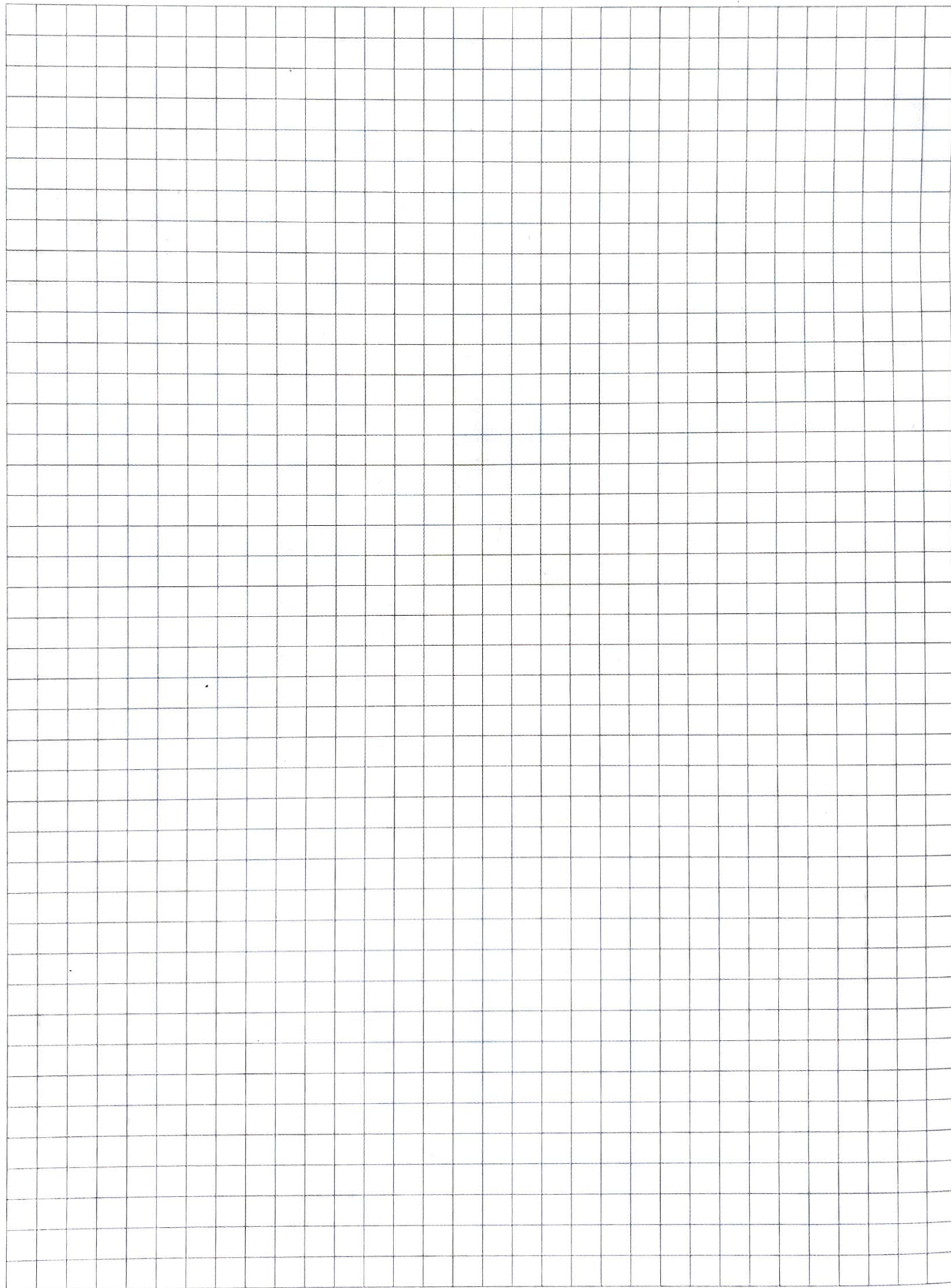
Dane są dwa okręgi.

Okrąg  $o_1$  o równaniu  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ .

Okrąg  $o_2$  o równaniu  $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 35 = 0$ .

### Zadanie 8.1. (0-2)

Wyznacz współrzędne środków i promienie okręgów  $o_1$  i  $o_2$ . Zapisz obliczenia.

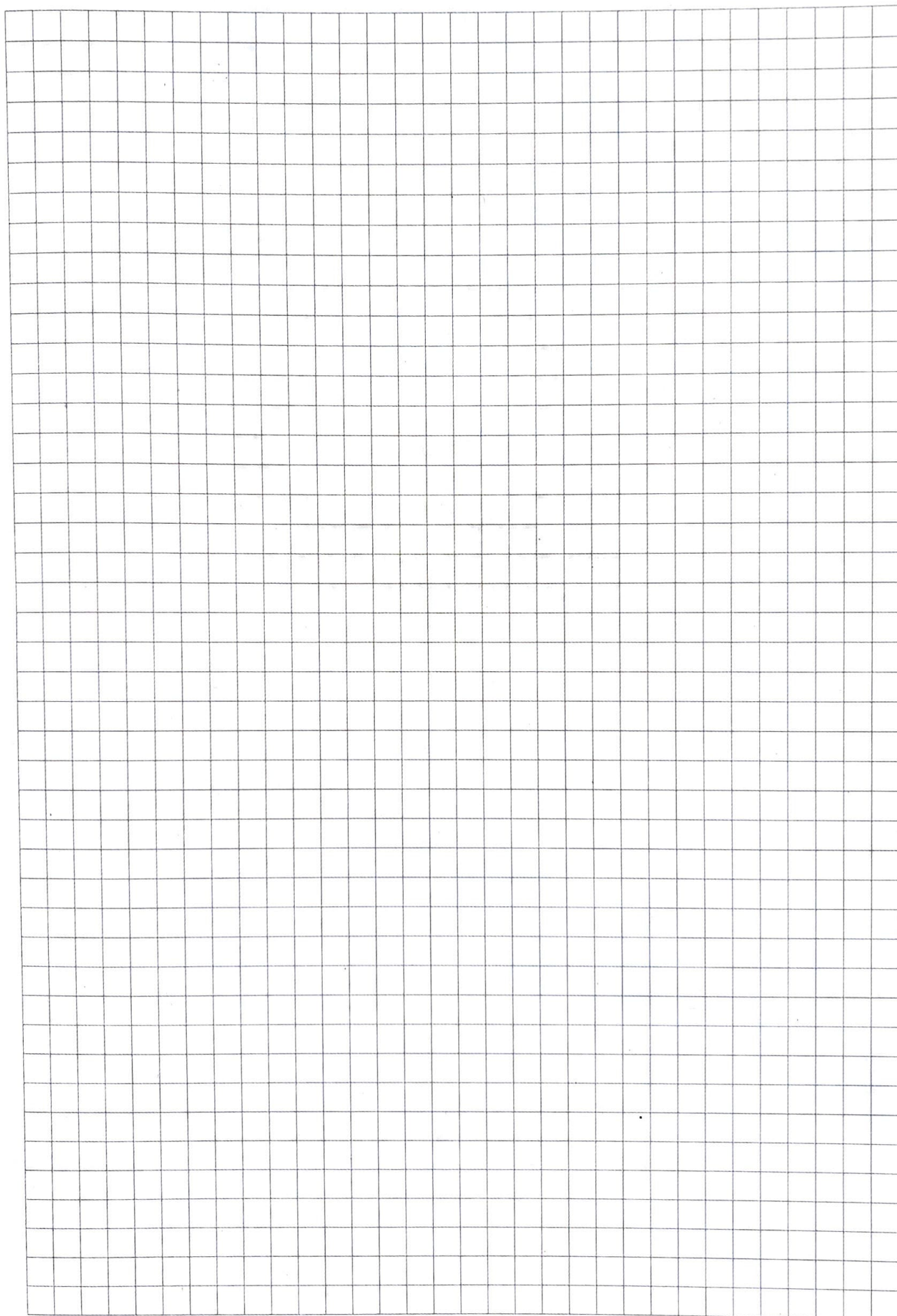


**Zadanie 8.2. (0-3)**

Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgów  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 8.3. (0-5)**

Wyznacz równania wspólnych stycznych do okręgów  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Zapisz obliczenia.



### Zadanie 9.

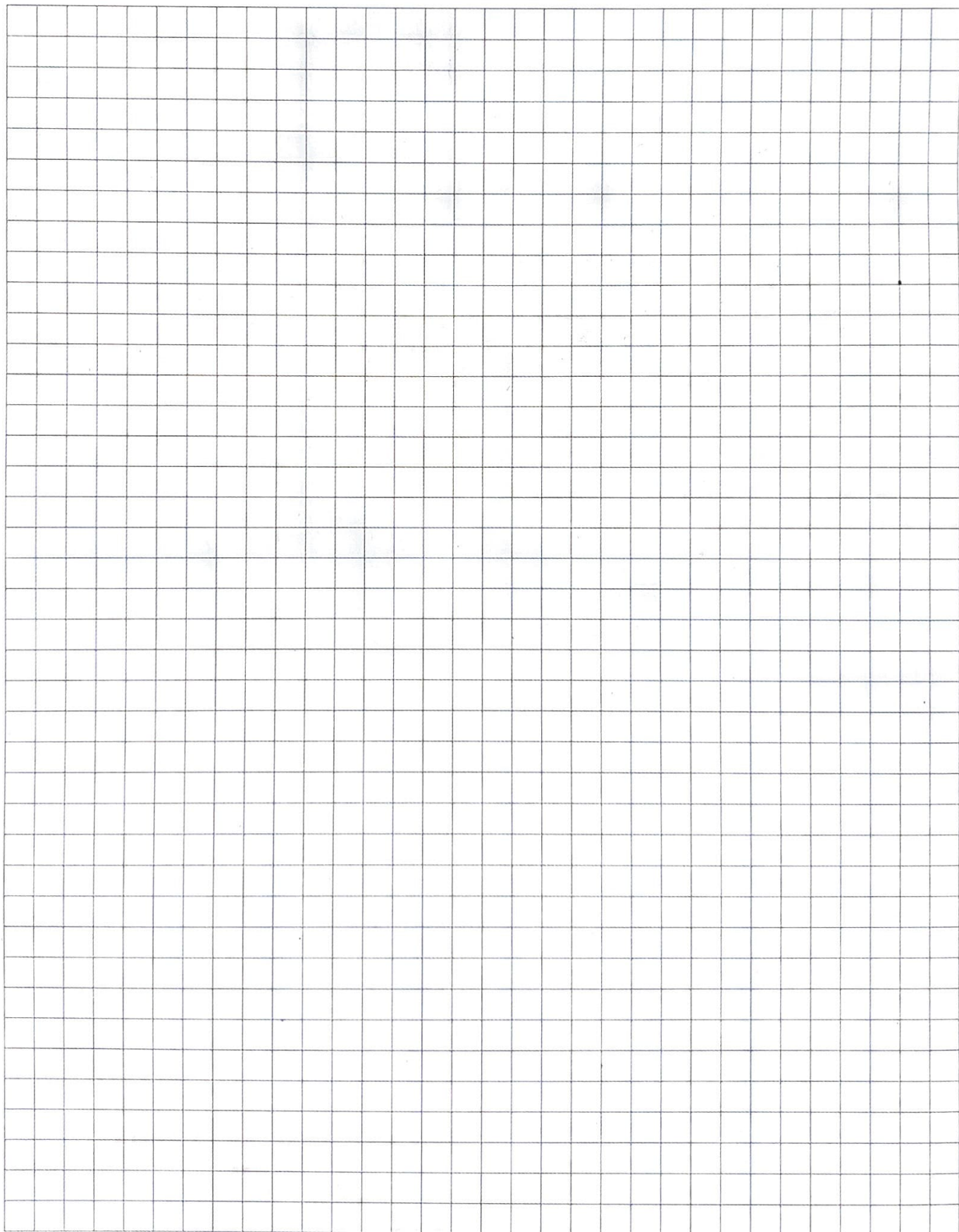
Podstawą ostrosłupa prawidłowego  $ABCDS$  jest kwadrat  $ABCD$  o boku 6. Krawędzie boczne ostrosłupa też mają długość 6. Punkt  $E$  jest środkiem krawędzi  $CS$ .

#### Zadanie 9.1. (0-3)

Oblicz pole przekroju ostrosłupa  $ABCDS$  płaszczyzną  $ABE$ . Zapisz obliczenia.

#### Zadanie 9.2. (0-4)

Oblicz długość odcinka  $EF$ , gdzie  $F$  jest środkiem  $AD$ . Zapisz obliczenia.



**Zadanie 10. (0-6)**

Rozpatrujemy wszystkie proste  $k$  przechodzące przez punkt  $P = (1, 8)$ . Prosta  $k$  przecina dodatnią półoś  $OX$  w punkcie  $A$  oraz dodatnią półoś  $OY$  w punkcie  $B$ .

Wyznacz równanie tej prostej  $k$ , dla której długość odcinka  $AB$  jest najmniejsza.

Oblicz długość tego odcinka. Zapisz obliczenia.

